El sistema de los enteros

National Council of Teachers of Mathematics

TEMAS DE MATEMATICAS

9. EL SISTEMA DE LOS ENTEROS

Este cuaderno es uno de los diez nuevos títulos que ha elaborado el National Council of Teachers of Mathematics, los que se suman a la serie de ocho ya aparecidos y reimpresos varias veces en la versión castellana.

Como cada uno de los ocho cuadernos mencionados, el presente ha sido escrito para maestros de enseñanza elemental y media, y alumnos de este último ciclo. Comprende la exposición del tema el sistema de los enteros, un tema básico de matemáticas. Este tema, como los que trata la serie, ahora de dieciocho, se halla entre los que el maestro necesita dominar para tener una comprensión más cabal de la matemática que usualmente se enseña en esos grados. Cada cuaderno es la introducción a un tema, no un tratado exhaustivo.

Los temas escogidos son especialmente importantes para aquellos maestros que consideran que las experiencias de aprendizaje, transmitidas a los niños del ciclo elemental, deberían empezar por el desarrollo de algunos conceptos unificadores básicos en matemáticas, y para los alumnos de nivel medio y superior que deseen comprender más a fondo los conceptos básicos de la matemática, tratados en cada uno de estos cuadernos.

Es el deseo de los autores y del NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) que esta serie de cuader-

Colección

TEMAS
DE
MATEMATICAS

Traducción:

Federico Velasco Coba
Coordinador del Instituto
de Geofísica
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma
de México

Revisión técnica:

Emilio Lluis Riera
Instituto de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma
de México

9

El sistema de los enteros

National Council of
Teachers
of Mathematics
U.S.A.

Editorial F. Trillas, S. A.
México, 1970

Título de esta obra en inglés
Topics in Mathematics for Elementary School Teachers
Versión autorizada en español de la
primera edición publicada en inglés por

Primera edición en español: julio 1970

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Impreso en México

Esta obra terminó de imprimirse
el día 27 de julio de 1970,
en los talleres de
Programex Editora, S. A.
Comonfort 58-6, México, D. F.

Se tiraron 8 000 ejemplares.

Prólogo

Este cuaderno es uno de diez nuevas unidades de una serie introducida en 1964 por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, National Council of Teachers of Mathematics). El buen recibimiento que se dio a los ocho primeros folletos, varias veces reimpresos, nos hizo pensar que sería conveniente una extensión de los temas en ellos tratados.

Al igual que los cuadernos anteriores (los números 1 al 8), las nuevas unidades han sido escritas pensando más en los maestros de escuelas elementales que en sus alumnos. Cada folleto presenta un tema básico de las matemáticas. Los temas son siempre de aquellos con los que los profesores de escuelas elementales necesitan estar familiarizados para poder tratar comprensivamente las matemáticas que por lo común se enseñan en la escuela elemental. Los folletos presentan una introducción a los temas, no un tratamiento exhaustivo de ellos; el lector interesado puede estudiarlos con mayor profundidad en otras publicaciones.

Los temas se escogieron especialmente con la finalidad de proveer de un material básico a los profesores que creen que las experiencias educativas que se presentan a los niños en sus primeros años escolares deben incluir una introducción sencilla a algunos de los *conceptos unificadores centrales de la matemática*. Muchos profesores han encontrado que su educación profesional no les prepara para enseñar la aritmética en una forma acorde con este punto de vista. La esperanza de los autores y del NCTM es que esta serie de cuadernos pueda ser una ayuda para estos profesores, y también para otros, al igual que para todos los interesados en el mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas.

Los primeros títulos son:

Cuaderno 1: *Conjuntos.*
Cuaderno 2: *Números enteros.*
Cuaderno 3: *Sistemas de numeración para los números enteros.*
Cuaderno 4: *Algoritmos de las operaciones con números enteros.*
Cuaderno 5: *Números y sus factores.*
Cuaderno 6: *Números racionales.*

Cuaderno 7: *Sistemas de numeración para los números racionales.*
Cuaderno 8: *Proposiciones numéricas.*

Los nuevos títulos son los que siguen:

Cuaderno 9: *El sistema de los enteros.*
Cuaderno 10: *El Sistema de los números racionales.*
Cuaderno 11: *El Sistema de los números reales.*
Cuaderno 12: *Lógica.*
Cuaderno 13: *Gráficas, relaciones y funciones.*
Cuaderno 14: *Geometría informal.*
Cuaderno 15: *Medida.*
Cuaderno 16: *Recopilación, organización e interpretación de datos.*
Cuaderno 17: *Sugerencias para la resolución de problemas.*
Cuaderno 18: *Simetría, congruencia y semejanza.*

Se sugiere que de ordinario, se lean los cuadernos en el orden de los números que se les asignó porque, hasta cierto punto, ha sido una presentación en espiral la que se usó en su preparación.

La preparación de los nuevos cuadernos comenzó en 1966 por parte de un grupo de escritores miembros de un curso de verano, quienes hacen público aquí su profundo agradecimiento a las siguientes personas, por la lectura de parte de los manuscritos, y el cambio de opiniones que mantuvieron con ellos durante la preparación de los folletos: Joseph M. Trotter, director de la Escuela de San Luis Rey, y Bonita Trotter, profesora de la Escuela Laurel, ambos del Oceanside Union School District; John M. Hoffman, director de la Sección de Recursos Educativos de la Comunidad del Departamento de Educación del Condado de San Diego; y James E. Inskeep, Jr., profesor de educación en el San Diego State College. Los escritores se sienten especialmente en deuda con Alice C. Beckenbach por su extensa ayuda en la organización y edición del material de varios de los folletos. Finalmente, expresan su máxima gratitud también a Elaine Barth y su magnífico cuadro de mecanógrafos por su excelente trabajo en la preparación del manuscrito.

El nuevo proyecto, emprendido como una continuación del anterior, fue iniciado y apadrinado por el Comité de Publicaciones Suplementarias de la NCTM bajo la presidencia de William Wooton. El apoyo económico lo proveyó la NCTM, que extiende su gratitud al grupo de escritores que produjo la presente extensión de la serie de "temas". Damos sus nombres a continuación:

George Arbogast
Manuel P. Berri
Marguerite Brydegaard
Louis S. Cohen
Helen L. Curran
Patricia Davidson
Walter Fleming
Joseph Hashisaki
Lenore S. John
David Johnson
Robert H. Sorgenfrey
J. Dean Swift
William Wooton
Edwin F. Beckenbach, *coordinador*

Indice general

El sistema de los enteros

CUADERNO 9

INTRODUCCIÓN

Para una gran mayoría, los números y las propiedades de los números son importantes sólo mientras son útiles en la descripción de situaciones de la vida real o en la resolución de problemas prácticos en los que aparecen incluidas "cantidades" de alguna clase. La dueña de casa que desea reducir una receta para ocho comensales a las proporciones adecuadas para seis, desearía saber multiplicar por 6/8 ó 3/4. El dependiente de una tienda de comestibles que no tiene una caja registradora a su disposición que automáticamente calcule el cambio, deberá ser capaz de restar \$3.47 de \$5.00 para poder dar el cambio de un billete de cinco pesos, o al menos saber determinar cuánto dinero se debe agregar a \$3.47 para completar los \$5.00.

Lo cierto es que cualquiera que se dé cuenta de la naturaleza de la civilización de nuestro tiempo difícilmente podrá dejar de observar con cuánta frecuencia los números y sus propiedades afectan nuestra vida cotidiana.

Los números, sin embargo, como cualesquiera otras abstracciones (pues el concepto de número es una abstracción), son útiles en la práctica tan solo hasta el punto en que se comporten paralelamente a alguna situación de la vida real. Por ejemplo, si no fuera cierto que añadiendo dos tazas de leche a tres de harina se produjese la misma clase de pastel (excepto en lo que a cantidad se refiere) que añadiendo tres tazas de leche a cuatro y media de harina, el hecho matemático de que

$$\frac{2}{3} = \frac{3}{4\frac{1}{2}}$$

no tendría utilidad para adaptar una receta a determinado número mayor de comensales. Lo esencial es que los números son útiles porque se prestan (al igual que muchas de las propiedades asociadas con sus sumas, sus productos, sus diferencias y sus cocientes) al estudio de una amplísima variedad de situaciones físicas. Por otra parte, para diferentes aspectos del mundo real usamos diferentes clases de números.

Los números que se usan con más frecuencia al enfrentarnos a problemas cuantitativos en la vida cotidiana son los números naturales, tales como 0, 1, 2, y 3 y los representados por fracciones, como 3/4, 2/5, y 21/6, o por decimales, como 0.12, 2.305 y 71.6. Los números naturales nos ayudan a tratar con la idea de "cantidad". Los números representados por fracciones son útiles en la medidas; nos ayudan a contestar preguntas sobre "qué parte de" o "cuánto". Es por ello que son estos los números que reciben nuestra principal atención en los primeros años de nuestras vidas y por lo que, en cierto sentido, tienen para la mayoría de la gente la máxima importancia.

Aparte de los aspectos del mundo físico que podemos estudiar o de los que podemos tratar usando números naturales y fracciones, hay otros aspectos que demandan nuestra atención. Muchas de las situaciones cotidianas envuelven la idea de magnitudes *dirigidas,* es decir, de magnitudes a las que podemos referirnos como si estuvieramos en lados opuestos a un punto de referencia dado. Al igual que existen temperaturas superiores a los cero grados centígrados, también las hay inferiores; lo mismo que hay alturas sobre el nivel del mar, también existen "alturas" bajo el nivel del mar, y exactamente lo mismo que un mojón puede estar situado a dos kilómetros al oeste de un punto dado en una carretera, puede también estar localizado a dos kilómetros al este de dicho punto dado. Este tipo de situaciones depende o está relacionado no solo con magnitudes, sino con lo que podemos describir como *direcciones opuestas.* Ninguno de los números naturales ni de los números tales como 3/2, 2.7 ó 0 posee propiedades paralelas a esta noción de "oposición". Por tanto, si queremos ser tan prácticos respecto a modelos de cosas tales como termómetros, o pérdidas y ganancias en un negocio, como lo somos respecto a recetas y cálculos de un cambio, necesitamos emplear números que de algún modo reflejen la "oposición" al mismo tiempo que la magnitud. Hay varios sistemas de números que tienen las características deseadas. Como deseamos que nuestra introducción a las propiedades de tales números sea lo más sencilla posible, consideraremos primero el más sencillo de tales sistemas, el sistema de los *enteros.* Al conjunto de elementos de tal sistema —es decir, al conjunto de los enteros— lo representaremos por J.[1]

[1] Cuando los elementos de un conjunto de números se consideran junto con sus propiedades respecto a operaciones como la adición y la multiplicación, a conjunto y operaciones, todo englobado, se le llama un *sistema.* (Para una discusión sobre conjuntos véase el cuaderno 1: *Conjuntos.)*

ENTEROS

Algo ya viejo

De acuerdo con el criterio de que siempre (o casi siempre) es buena idea comenzar cualquier cosa nueva con algo viejo y familiar, empezamos esta discusión recordando dos conjuntos de números usados todos los días por la mayoría de nosotros. Son éstos, el conjunto N de los *números naturales*,

$$N = \{1, 2, 3, 4, \cdots\},$$

y el conjunto W de los que llamaremos *números plenos*,[2] que consiste en N y un número adicional, 0:

$$W = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}.$$

En cada uno de estos conjuntos no hay un último elemento. Esta situación se indica usando tres puntos en la notación de la manera que puede verse. Lo que queremos recordar acerca de estos conjuntos incluye lo siguiente.

A) Ambos son conjuntos ordenados. Esto quiere decir que dados dos números (diferentes) en cualquiera de ellos, siempre es cierto que uno de los números es menor que el otro. Por ejemplo, en cualquiera de los conjuntos 2 es menor que 3, 3 es menor que 4, y así sucesivamente. El símbolo $<$ (que debe leerse: "es menor que") se usa para denotar esta relación. Así pues, "2 es menor que 3" se representa por "$2 < 3$". Si se invierte el sentido de $<$, entonces el símbolo resultante aparece como $>$ y quiere decir "es mayor que". Así pues, "$4 > 1$" se lee "4 es mayor que 1".

B) Cada uno de los conjuntos N y W puede representarse usando una recta numérica, como la que aparece en la figura 1. Recuérdese que los puntos

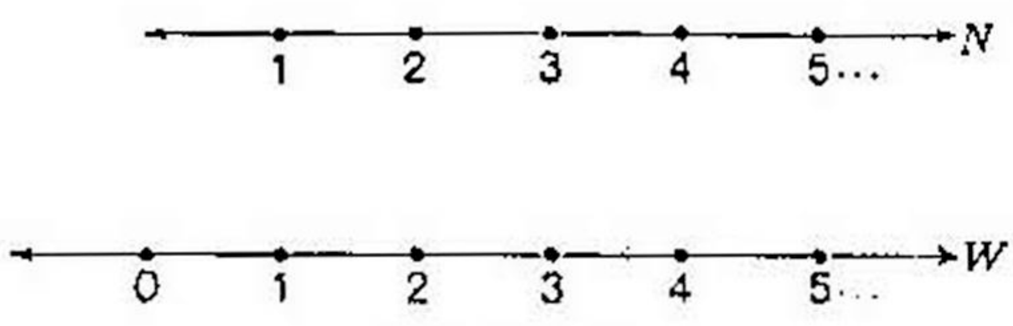


FIGURA 1

[2] En los cuadernos anteriores, al referirnos al conjunto de números $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, se empleó el nombre de *números enteros*, por ser este vocablo de uso más general en lengua española. En este cuaderno, y en los subsiguientes, al referirnos a ellos los llamaremos *plenos*. (Véase el cuaderno 2: *Números enteros;* el cuaderno 3: *Sistemas de numeración para los números enteros,* y el cuaderno 4: *Algoritmos de las operaciones con números enteros.*)

gruesos en la figura marcan los puntos a los que llamamos *gráficas* de los números. El número emparejado con un punto se llama *coordenada* del punto. Las puntas de flecha aparecen en los extremos de las rectas para indicar su extensión ilimitada, y los puntitos que siguen al número 5 tienen por objeto sugerir la sucesión indefinida de los números, tanto en N como en W.

C) Tanto en N como en W hay dos operaciones *básicas*, la adición y la multiplicación, y dos operaciones *asociadas*, la substracción y la división. Estas operaciones tienen algunas propiedades básicas con las que el lector probablemente ya está familiarizado, y que, de todas maneras, más tarde discutiremos brevemente en relación con los enteros.

¡Aviso importante!

Antes de que podamos informarle cuál es la cantidad por pagar en el próximo periodo de seguro, debe presentarse la siguiente declaración.

A-1 Compañía Aseguradora de Automóviles.

Número de accidentes en los últimos 6 meses ☐

Número de infracciones de tránsito cometidas en los últimos 6 meses ☐

Firma ....

FIGURA 2

Para distinguir claramente la diferencia entre N y W, basta recordar que el conjunto N no contiene al número 0, mientras que W sí; por lo demás, constan de los mismos números. En situaciones prácticas, el conjunto W es, desde luego, el más útil, porque con frecuencia necesitamos usar un número para describir situaciones tales como la de qué cantidad de dinero se tiene en el bolsillo un día antes del día de pago, o cuántas veces ha estado alguien en el Polo Norte, cuando "ni una" y "nunca" son las *palabras* que las describen. Nótese que las expresiones "ni una" y "nunca" no son nombres de números, pero la palabra "cero" y el símbolo "0" sí lo son. El lector no debe confundir el número 0 con lo que tal número describe. La figura 2 sugiere cuán útil puede ser el "0" en ciertas circunstancias.

Los números naturales y los números plenos son los números que usamos para indicar alguna cantidad o magnitud. Usamos estos números para ayudarnos a resolver problemas análogos a los que siguen:

1. Si una caja de pelotas de tenis cuesta \$25.00, ¿cuánto cuestan cuatro cajas?
2. Si un automóvil corre a una velocidad constante de 50 kilómetros por hora, ¿cuánto tardará en completar un recorrido de 200 kilómetros?
3. Juan pesa 73 kg y Juana pesa 46 kg. ¿Pueden cruzar juntos un puente que sólo puede soportar 115 kg?

Para contestar a la pregunta 1 el lector debe, evidentemente, multiplicar el número pleno 4 por el número pleno 25 para obtener el número pleno 100; y entonces contestaría a la pregunta diciendo: "100 pesos". Análogamente, como el número pleno 200 dividido por el número pleno 50 da el número pleno 4 como cociente, el lector resolvería el problema 2 diciendo: "cuatro horas". Aunque la pregunta 3 no nos pide cantidad de clase alguna como contestación, debemos, sin embargo, usar el conjunto de los números plenos para ayudarnos a responder adecuadamente. Como $46 + 73 = 119$ y $115 < 119$, podemos contestar con un simple "no".

Adviértase que aquí no aparecen ideas de "oposición" en ninguna de las anteriores situaciones reales. Consideremos, empero, un cuarto problema de significación real (al menos para algunas personas):

4. Se extiende un cheque de \$200 contra una cuenta corriente en que sólo hay \$180. Si el banco acepta el cheque, ¿cuál será el nuevo estado de cuenta?

Para poder contestar esta pregunta con solo un número, tendremos que buscar éste en un sitio distinto a los conjuntos N o W.

GRUPO DE EJERCICIOS 1

1. N = conjunto de números naturales.
W = conjunto de números plenos.

Complétense las siguientes igualdades (véase el cuaderno 1: *Conjuntos,* para ver la notación de conjuntos):

a) $N \cup W =$ ———.
b) $N \cap W =$ ———.

2. Explíquese por qué el conjunto de los números naturales es un subconjunto propio del conjunto de los números plenos.

3. Ordénese el siguiente conjunto de menor a mayor:

7, 5, 19, 0, 3

4. ¿Cuáles, de entre los siguientes, son nombres de números plenos?

a) $3 + 5$ d) 2×4
b) $5 - 7$ e) $8 \div 8$
c) $19 - 6$ f) $16 \div 3$

5. Complétese la siguiente frase: El número asociado con un punto sobre la recta numérica se llama del punto.
6. Complétese la siguiente frase: El punto asociado con un número sobre la recta numérica se llama del número.
7. ¿Cuáles son las dos operaciones básicas en el conjunto de los números plenos?
8. ¿Pueden resolverse los siguientes problemas usando el conjunto de los números plenos y la operación de adición? ¿Por qué?

a) Mi novia y yo vivimos en la misma calle. Ella vive a tres cuadras de donde yo vivo. Una nueva vecina que acaba de mudarse a nuestra calle vive a cinco cuadras de mi novia. ¿A qué distancia donde vivo, vive la nueva vecina?
b) Esta mañana la temperatura cambió 8 grados entre las siete de la mañana y el mediodía. Desde el mediodía ha cambiado tres grados. ¿En cuánto difiere la temperatura que tenemos ahora de la que teníamos a las siete de la mañana?

Algo nuevo

Supongamos que tenemos un espejo con su borde sobre el punto 0 de la figura 3 y con su cara perpendicular a la recta de los números, en la forma

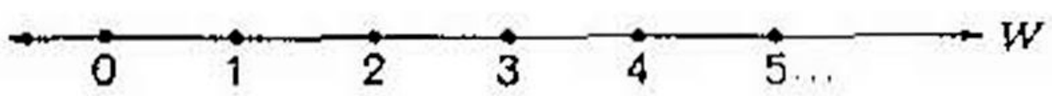


FIGURA 3

que sugiere la figura 4. Si ahora meditamos sobre la parte de la recta que llega hasta el espejo y la reflexión de ella como si representara una sola recta, obtenemos la recta numérica que aparece en la figura 5. Podemos describir ésta como una especie de extensión "a través del espejo" del conjunto de los números plenos, en la que una infinidad de nuevos números aparecen graficados indefinidamente a la izquierda del origen (la gráfica de cero).

Estos nuevos números, desde luego, no tienen por el momento sentido alguno, y sólo cuando decidamos cómo hemos de compararlos y cómo

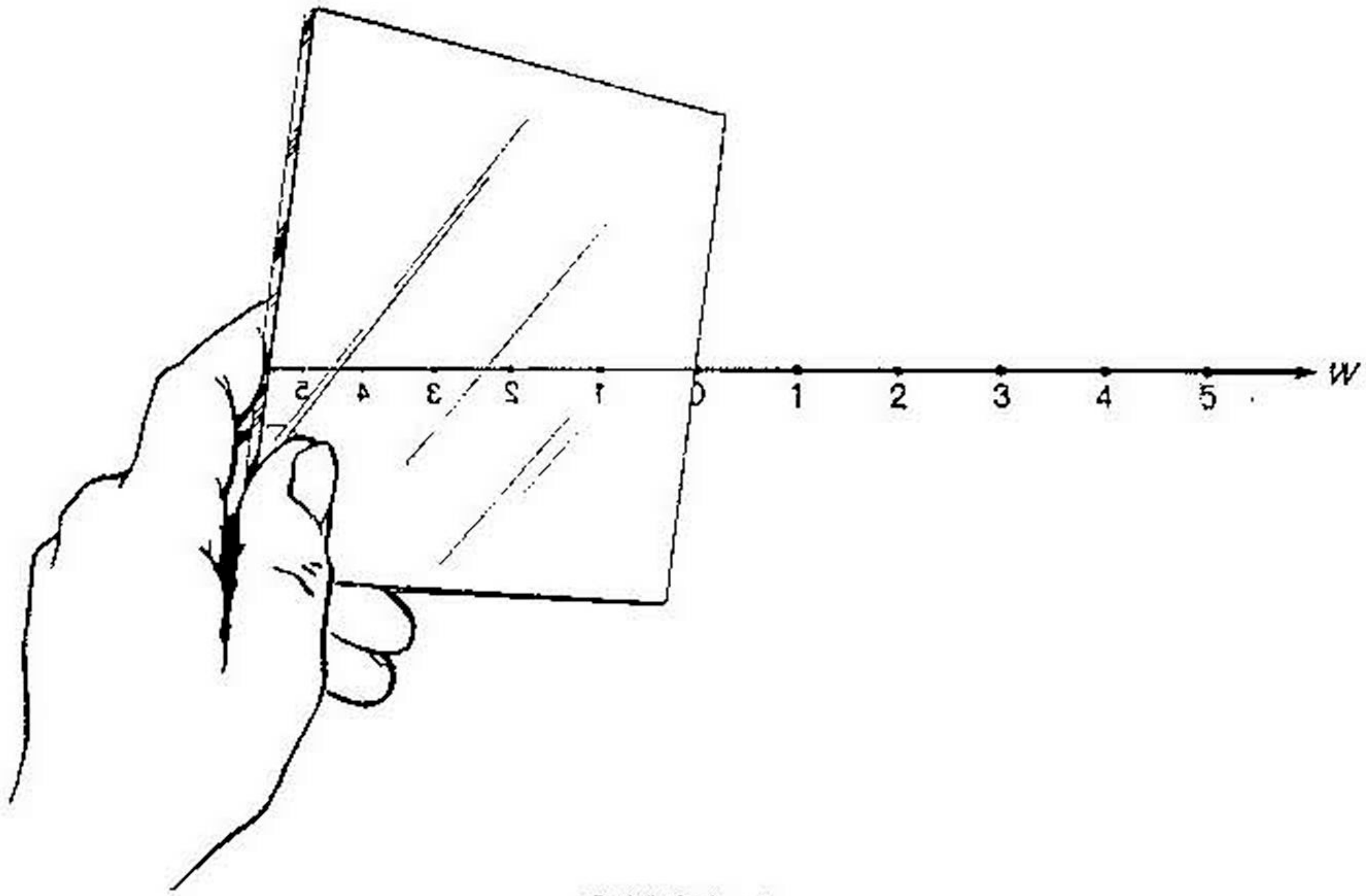


FIGURA 4

hemos de operar con ellos es cuando adquieren un significado y se hacen valiosos. Como el examen de todos estos temas es el principal objeto de este cuaderno, no obstante lo dicho, nos referiremos a ellos de aquí en adelante como *números* y consideraremos que su derecho al uso de tal nombre es exactamente igual al que supusimos tenían al usarlo los números plenos. Las decisiones respecto a estos números se hacen porque son consistentes, parecen razonables y son útiles. Debemos tener siempre presente, no obstante, que estas decisiones constituyen *definiciones;* no *probamos* cómo se comparan entre sí ni cómo se efectúan operaciones con ellos.

Nótese que podemos dividir el conjunto de números

$$\{\cdots 5, 4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots\},$$

algunas de cuyas gráficas se muestran en la figura 5, en tres conjuntos distintos y sin traslapes (conjuntos ajenos). Son éstos el conjunto

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$$

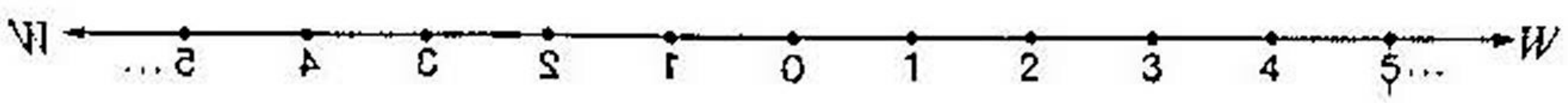


FIGURA 5

de los números naturales con el que comenzamos; el conjunto {0}, cuyo único elemento es 0, y el conjunto

{· · ·, ꙅ, Ɥ, Ɛ, Ƨ, Ɪ }.

de aquellos números cuyas gráficas aparecen a la izquierda de 0 sobre la recta de los números y, por tanto, cuyas gráficas se oponen a las de los elementos de N. Nótese que tenemos pares de números en este conjunto extendido —por ejemplo, 1 y Ɪ, 2 y Ƨ, 3 y Ɛ— cuyas gráficas son "reflexiones en el espejo" una de la otra con centro en el punto origen, 0.

Ahora, mediante el cambio de algunos símbolos, podemos ir directamente desde el conjunto que hemos obtenido con la ayuda de un espejo, al conjunto J de los enteros.

Convengamos, para comenzar, en que para los números cuyas gráficas aparecen a la izquierda del origen sobre la recta de los números, usaremos los símbolos $^{-}1$ (léase "menos uno") en lugar de Ɪ, $^{-}2$ (léase "menos dos") en lugar de Ƨ, $^{-}3$ (léase "menos tres") en lugar de Ɛ, y así sucesivamente. Así pues, anteponiendo un signo menos un poco levantado al numeral que representa un número natural, denominaremos a su imagen en el espejo". Cualquier número cuya gráfica se encuentre a la izquierda del origen en la recta de los números se llamará un *número negativo,* y al conjunto

$$\{\cdots, {}^{-}5, {}^{-}4, {}^{-}3, {}^{-}2, {}^{-}1\}$$

de todos estos nuevos números que acabamos de introducir se les representa por J^{-} (léase "jota menos") y se llama conjunto de los enteros negativos. (Parecerá raro que se coloque el signo menos al lado derecho de la letra J para representar al conjunto de los enteros negativos y, por el contrario, se coloque el signo menos al lado izquierdo de un numeral para representar a un entero negativo tal como, por ejemplo, $^{-}2$, pero el lector debe acostumbrarse al hecho de que los matemáticos, lo mismo que cualquier persona, pueden a veces comportarse extrañamente. El orden de estos símbolos no tiene significado particular alguno; es simplemente una costumbre. Todo esto también se aplica a los símbolos J^{+} y $^{+}2$ que introduciremos a continuación.

De acuerdo con la designación de sus nuevos auxiliares, nos referiremos también al conjunto N de los números naturales como al conjunto J^{+} (léase "jota más") de los *enteros positivos.* Algunas veces, cuando queremos poner un énfasis particular en el hecho de que cierto número es un entero positivo, usamos símbolos tales como $^{+}1$ (léase "más uno"), $^{+}2$ (léase "más dos"), y así sucesivamente, en lugar de los símbolos familiares 1, 2, etc.

Cuando esto se hace, debe tenerse presente que $^{+}1$ y 1 representan el mismo número; solamente el nombre ha cambiado. No daremos ningún nombre al conjunto $\{0\}$, cuyo único elemento es 0; pero es importante observar que el número 0, aunque sea entero, no es ni entero positivo ni entero negativo y es el único entero que tiene esta propiedad.

Por tanto, la unión de los conjuntos J^{+}, $\{0\}$ y J^{-} es el conjunto J de los enteros, que a veces se representa como

$$J = \{\cdots, {}^{-}3, {}^{-}2, {}^{-}1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

en donde los tres puntos en cada extremo indican que estos números continúan indefinidamente tanto en la dirección positiva como en la dirección negativa. (Véase la figura 6.)

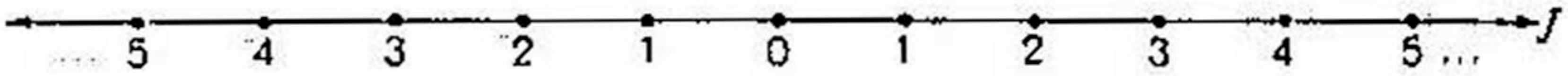


FIGURA 6

GRUPO DE EJERCICIOS 2

1. ¿Cómo se llaman los elementos del conjunto J^{-}?

2. ¿Cómo se llaman los elementos del conjunto J^{+}?

3. Enumérense algunos enteros que no sean elementos de J^{-} o J^{+}.

4. ¿A cuál de los conjuntos J^{-}, J^{+} o $\{0\}$ pertenece cada uno de los siguientes números?

a) $6 - 2$ **c**) $6 - 6$ **e**) $16 + 4$
b) $^{-}4$ **d**) $^{-}36$ **f**) 9

5. ¿En cuáles de las siguientes situaciones puede el lector necesitar el conjunto de los enteros? ¿En cuáles será suficiente el conjunto de los números plenos?

a) Calculando la matrícula total de una escuela, dado el número de niños en cada clase.
b) Haciendo un termómetro.
c) Indicando un cambio en el precio de ciertas acciones.
d) Registrando la altura de la plataforma continental en la costa de África, que es de 4 000 brazas bajo el nivel del mar.

6. Úsense los enteros para expresar cada una de las siguientes situaciones.

a) 5 puntos "en el hoyo".
b) Una pérdida de \$ 500.
c) 9 segundos antes de la explosión.
d) Una pérdida de 5 yardas sufrida por un equipo de futbol.

Opuestos

Si se excluye el 0, entonces los enteros pueden dividirse en *pares* de números que tienen gráficas sobre la recta numérica y están localizados a un mismo número de segmentos unidad del origen, pero en lados opuestos de él. Algunos ejemplos de tales pares son $^-1$ y 1, $^-2$ y 2, $^-3$ y 3. Decimos que $^-1$ es el *opuesto* de 1; 1 es el opuesto de $^-1$; $^-2$ es el opuesto de 2, etc. (Véase la figura 7.) Como la gráfica de 0 está a cero unidades en cada una de las dos direcciones del origen, decimos que 0 es su propio opuesto.

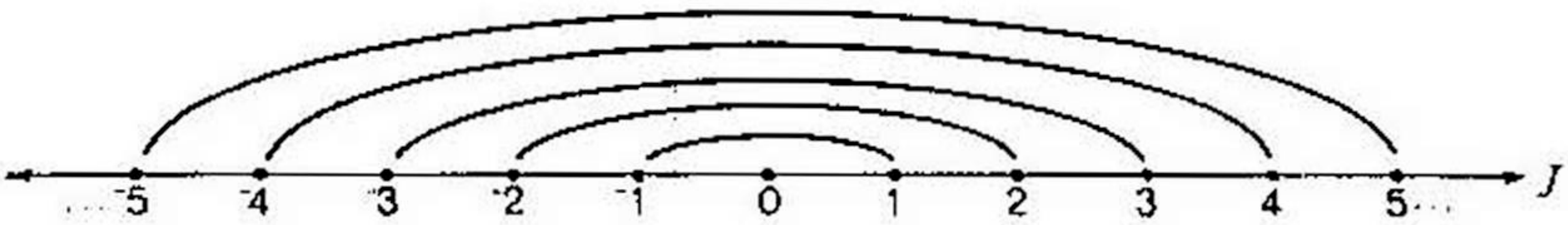


FIGURA 7

Que los enteros puedan usarse para describir cantidades que son de la misma magnitud, pero de direcciones opuestas, hace al sistema de los enteros útil en muchas situaciones prácticas. Por ejemplo, en la página 15 planteamos un problema acerca de una cuenta bancaria después de que había sido abonado un cheque de \$200 por el banco cuando ésta contenía sólo \$180. Si tenemos los enteros a nuestra disposición, podemos asignar un número al estado de cuenta resultante; a saber, podemos decir que el balance resultante es $^-$\$20.

El lector debe recordar que una *variable* es un símbolo que representa un elemento no especificado de cierto conjunto. Usualmente lo que se emplea para este propósito es una letra minúscula, por ejemplo a, b, n o x, aunque un pequeño cuadrado, $\square$, o un triángulo, $\triangle$, o cualquier otra figura sencilla podría usarse en su lugar. Decir, pues, que a es un elemento de J, quiere decir que se está utilizando el símbolo "a" para representar a un entero, entero que no se especifica cuál sea. El conjunto J se llama *conjunto de reemplazos* de la variable a.

Ahora bien, a menudo es necesario referirnos al opuesto de un entero particular. Por ello es útil tener un símbolo que represente el opuesto de un entero representado por una variable, por ejemplo a. Definimos por ello el símbolo $°a$ (léase "el opuesto de a") como representando el *opuesto* de a. Así pues, si $a = 4$, entonces $°a = {}^-4$, mientras que si $°a = 3$, entonces $a = {}^-3$. Por tanto, la proposición

$$°(^+3) = {}^-3, \quad \text{o} \quad °3 = {}^-3,$$

quiere decir que el opuesto de más 3 es menos 3; y la proposición

$$°(^-4) = {}^+4, \quad o \quad °(^-4) = 4,$$

quiere decir que el opuesto de menos cuatro es más cuatro.

Un punto importante que se debe recordar respecto al uso de una variable y el símbolo para "el opuesto de" es éste: no se puede suponer que si a representa un entero, deba por ello representar a un entero positivo; tampoco podemos suponer que si $°a$ representa un entero, deba representar forzosamente a un entero negativo. Los símbolos a y $°a$ cuando se usan para representar enteros, pueden representar a enteros positivos, a enteros negativos o a 0. De lo que se puede tener seguridad es de que si a es positivo, entonces $°a$ es negativo, y de que si a es negativo, entonces $°a$ es positivo. Usando los símbolos de conjuntos podemos escribir esto diciendo que "si $a \epsilon J^+$, entonces $°a \epsilon J^-$" (léase: si a es un elemento de jota más, entonces el opuesto de a es un elemento de jota menos") y "si $a \epsilon J^-$, entonces $°a \epsilon J^+$".

El único entero que no es ni positivo ni negativo es 0. Además, como ya antes hicimos notar, 0 es su propio opuesto; el lector puede ver, observando la recta de los números, que es el único entero que es su propio opuesto. De donde si a representa un entero tal que $°a = a$, entonces a debe representar al entero 0.

GRUPO DE EJERCICIOS 3

1. Escríbase el opuesto de cada uno de los enteros que abajo aparecen:

a) 2   **d**) $^-768$
b) $^-8$ **e**) 45
c) 0   **f**) $^-30$

2. Complétense las siguientes igualdades:

a) $°7 =$ **d**) $°(6 \times 3) =$
b) $°(^-3) =$ **e**) $°(6 + 2) =$
c) $°0 =$ **f**) $°(5 - 2) =$

3. Complétese la siguiente tabla de valores para a y $°a$

a	2	$^-5$	4	$^-3$	0				1	$^-9$	
$°a$	$^-2$	5				6	$^-8$	$^-15$			$^-10$

4. Complétese la siguiente proposición: si a representa a un entero positivo, entonces $°a$ representa a un entero ____________.

5. Complétese la siguiente proposición: si $^{\circ}a$ representa a un entero ___________________, entonces a representa a un entero negativo.
6. Complétese la siguiente proposición: si $^{\circ}a = a$, entonces a representa al entero ___________________.

Representación de enteros por medio de flechas

Puesto que podemos aparejar todo entero pleno con un punto determinado de una recta, podemos construir una recta numérica y luego usar las gráficas de los números plenos para que nos ayuden a estudiar las propiedades de dichos números plenos. (Véase el cuaderno 2: *Números enteros.*) Podemos, análogamente, usar las gráficas de los enteros sobre una recta numérica para ayudarnos a estudiar y comprender las propiedades de los enteros.

Hay también otro posible empajeramiento que puede usarse como ayuda para visualizar las propiedades de los números plenos y de los enteros:

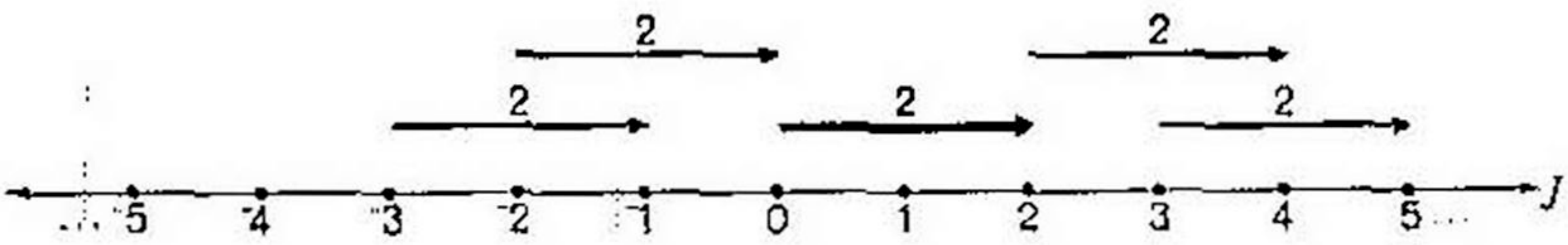


FIGURA 8

podemos representar un número pleno o un entero en términos de un *movimiento* o *traslación,* a lo largo de la recta numérica. Esto es particularmente cierto de los enteros porque incorporan la idea de las direcciones opuestas a la idea de magnitud. Por ejemplo, podemos pensar en el entero positivo 2 como si estuviera representado por un movimiento de 2 unidades hacia la *derecha* a lo largo de una recta horizontal y en el entero negativo $^{-}3$ como si fuera representado por un movimiento de 3 unidades hacia la izquierda a lo largo de la tal recta. Tal movimiento o traslación, puede, a su vez, representarse usando una flecha dibujada sobre la recta numérica, apuntando en la dirección del movimiento y teniendo una longitud igual al número de unidades implicadas en el movimiento. En realidad, la flecha debería pensarse como si estuviera situada directamente sobre la recta numérica; se dibuja arriba de la recta solamente por conveniencia visual. Cada flecha de la figura 8 representa, pues, al entero 2 porque apunta hacia la derecha y su longitud es de 2 unidades. Cada flecha de la figura 9 representa al entero $^{-}3$ porque apunta hacia la izquierda y su longitud es de 3 unidades. Nótese que la posición de la flecha sobre la recta

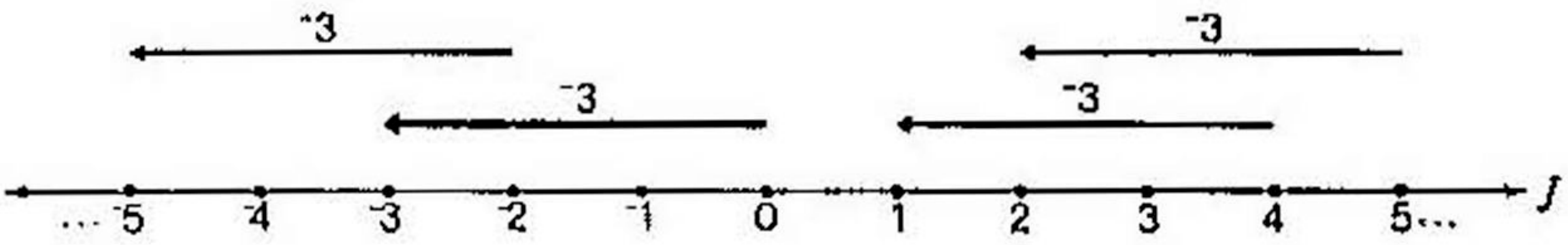


FIGURA 9

no tiene repercusión alguna sobre el número representado, ya que la representación se realiza solamente usando la longitud y la dirección de la flecha. En libros de matemáticas más avanzados estas flechas se conocen como *vectores* geométricos. Con el fin de que todos los enteros tengan una flecha como representación, llamamos a la representación como flecha de 0 una *flecha punto;* la concebimos como una flecha de dirección positiva o negativa, según sea lo más conveniente, y con una longitud de 0 unidades.

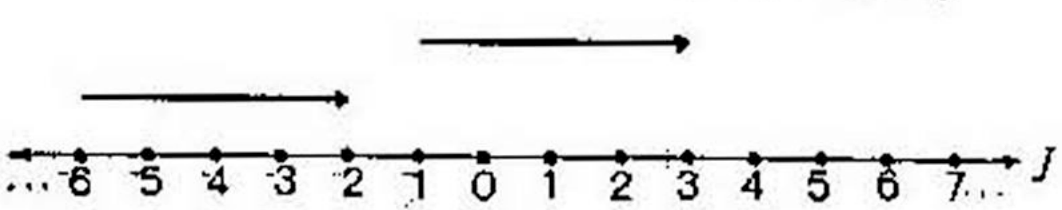
De todas las flechas que representan un entero dado, aquella que tiene su punto inicial (cola) sobre (o directamente encima de) el punto origen, tiene su punto terminal (cabeza) sobre (o directamente encima de) la gráfica del entero sobre la recta numérica; por esta razón la flecha se dice que está en *posición estándar*. Así pues, las flechas de trazo grueso de las figuras 8 y 9 están en posición estándar.

Otra forma en que se puede pensar en estas traslaciones es en la de caminatas para arriba y para abajo a lo largo de un camino recto que va de Este a Oeste. Dos pasos hacia el Este podrían representar al entero positivo 2, y 3 pasos hacia el Oeste podrían representar al entero negativo ⁻3. El entero 0 estaría representado por la inmovilidad, por ninguna caminata, aunque claro es que se puede pensar de una persona que no se mueve como si estuviera dando cara al Este o al Oeste; esto corresponde a la idea de tener una flecha sin longitud como representante del cero, pero aun así, siendo capaz de asignar una de las dos direcciones del camino a la flecha.

GRUPO DE EJERCICIOS 4

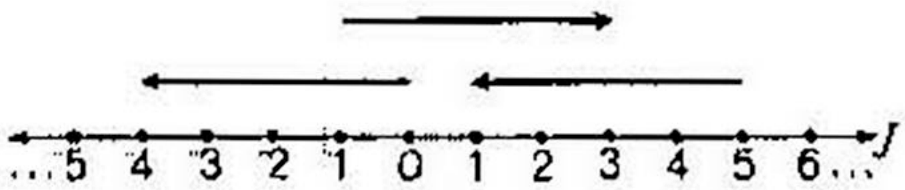
1. Obsérvense las flechas sobre la recta numérica que aparece enseguida.

a) ¿En qué sentido son análogas?
b) ¿En qué sentido son diferentes?
c) ¿Cuál es el entero que representa a cada una de ellas?



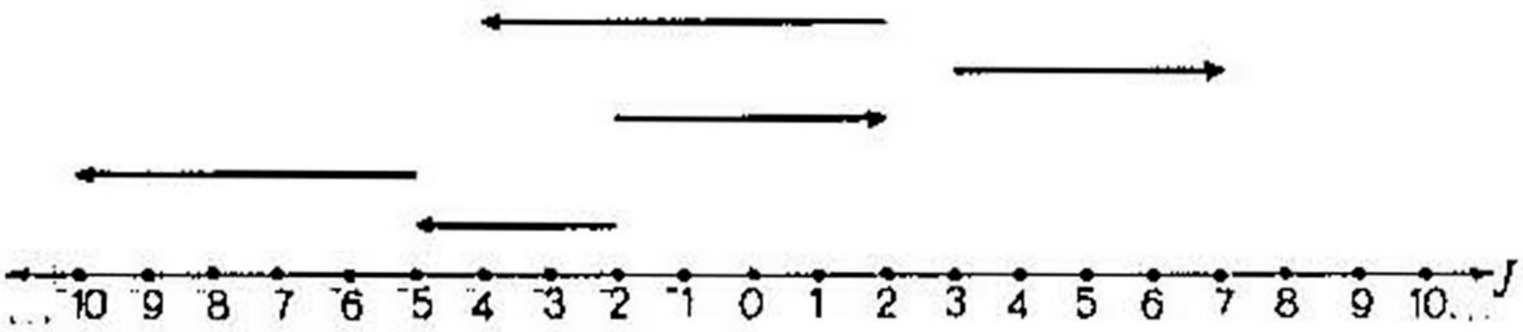
2. Obsérvense las flechas sobre la recta numérica que aparece más abajo.

a) ¿En qué sentido son análogas?
b) ¿En qué sentido son diferentes?
c) ¿Cuáles son los dos enteros distintos que están representados por estas flechas?
d) ¿Cuál es la flecha que está en posición estándar?



3. Dibújese una recta numérica. Rotúlese con enteros. Dibújense tres flechas, todas ellas representando a $^{-}4$, que comiencen en las gráficas de $^{-}4$, 7 y 0, respectivamente.

4. Rotúlese cada una de las flechas que abajo aparecen con el entero que representan.



Valor absoluto

Si un científico desea mantener un recipiente a una temperatura que no diste más de tres grados de los 0° centígrados, puede conectar un reóstato que tenga en movimiento una unidad de refrigeración a 3° sobre 0° y una unidad calefactora a los 3° bajo 0°. (Véase la figura 10.) Cada unidad

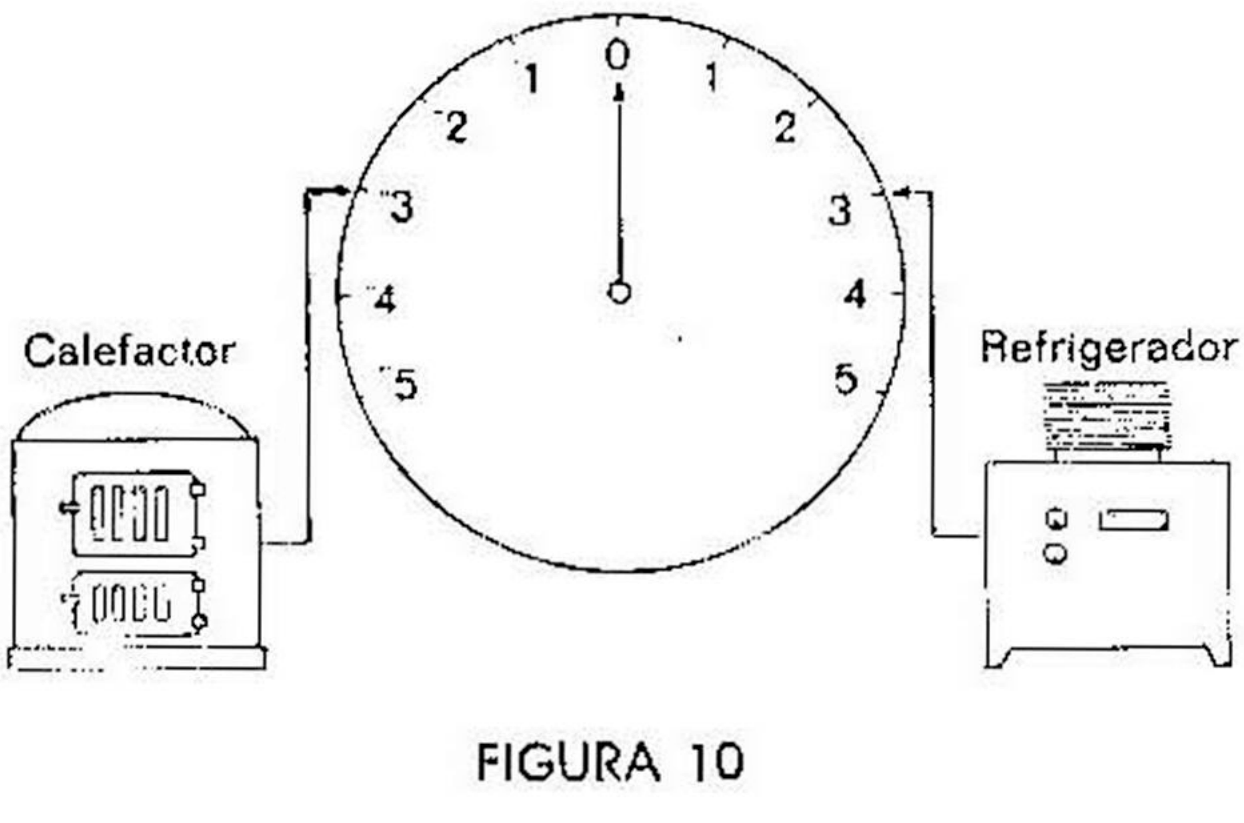


FIGURA 10

dejaría de funcionar cuando la temperatura alcanzara los 0°. Así pues, un cambio de 3° a partir de los 0° en cualquiera de las direcciones sería suficiente para iniciar un contramovimiento en la temperatura. En tal situación, la *dirección* del cambio en la temperatura tendría importancia solamente hasta el punto en que resultara en una acción apropiada por parte del calentador o la refrigeración; lo fundamental es que un *cambio*

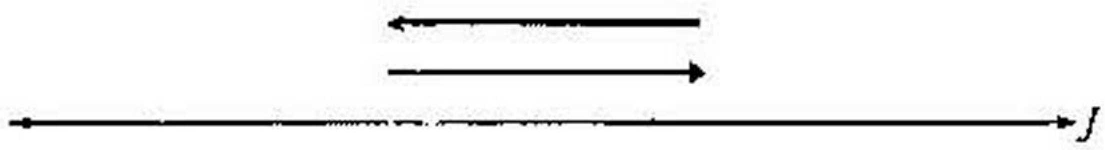


FIGURA 11

de 3° a partir de 0° debe producir una acción correctiva. Hablando en términos matemáticos, el científico está interesado en lo que se llama el *valor absoluto* de los enteros 3 y $^{-}3$. Como más adelante verá el lector, este concepto desempeña un importante papel en las operaciones de adición, substracción, multiplicación y división de enteros; de acuerdo con ello consideraremos el concepto de diversas maneras.

Para explicar lo que debe entenderse como *valor absoluto* de un entero, volvamos otra vez a pensar en los enteros en términos de su representación como flechas. Las representaciones como flechas de 1 y $^{-}1$ son semejantes en un aspecto, en longitud. Son, sin embargo, opuestas en dirección, Análogamente, las flechas que representan a 2 y $^{-}2$ tienen la misma longitud, pero direcciones opuestas, y lo mismo ocurre con las flechas que representan a 3 y $^{-}3$. En general, para cualquier entero dado las flechas que representan al entero y a su opuesto tienen la misma longitud, pero direcciones opuestas (fig. 11). Desde luego, nuestro convenio al asignar cualquiera de las direcciones a una flecha que represente a 0 es un reconocimiento del hecho de que 0 es su propio opuesto. Con los anteriores hechos in mente, definamos el valor absoluto de un entero en términos de la longitud de una flecha que represente al entero:

> *Si a es un entero, entonces el* valor absoluto *de a es el entero no negativo (positivo o cero) que nos da la longitud de una flecha que represente a.*

El valor absoluto de a se representa por $|a|$. Por ejemplo,

$$|^{-}7| = 7, \ |7| = 7, \ |^{-}8| = 8, \quad \text{y} \quad |0| = 0.$$

Alternativamente, al convenir que la gráfica de un entero cualquiera está localizada a una distancia del origen que es un número entero no negativo de unidades, podemos definir el valor absoluto de un entero como sigue:

> *si a es un entero, entonces el valor absoluto de a es el entero no negativo que nos da la distancia de la gráfica de a al origen.*

La figura 12 ilustra esta definición de $|a|$, primero para $a < 0$ y luego para $a > 0$.

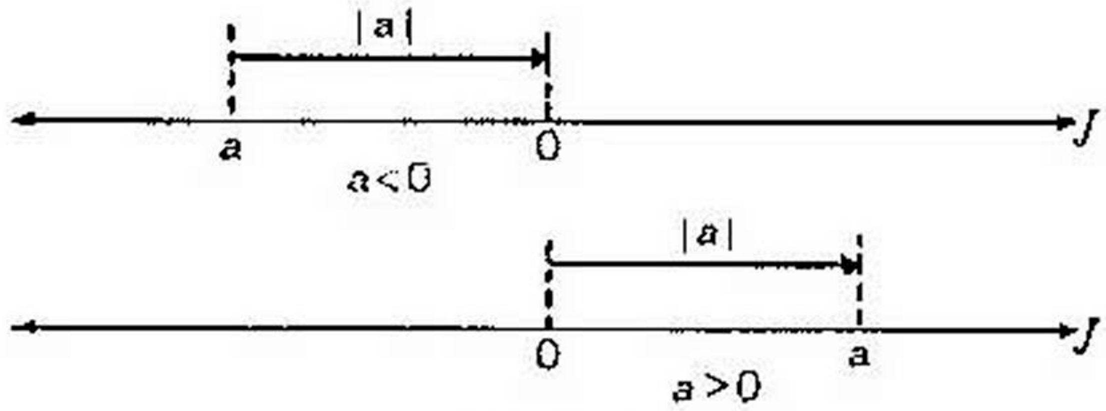


FIGURA 12

Podemos dar aún otra definición de valor absoluto, una definición que no depende de la recta numérica ni de la representación por medio de flechas. Comencemos por hacer notar una vez más que los símbolos a y ^{-}a representan *opuestos,* de modo que independientemente de cuál sea el entero denotado por a, ^{-}a denota su opuesto, e independientemente de cuál sea el entero denotado por ^{-}a, a denota su opuesto. Consideremos, entonces, la siguiente definición:

> *si a es un entero distinto de 0, entonces el valor absoluto de a es el positivo que hay en a y ^{-}a. El valor absoluto de 0 es 0.*

Demos algunos ejemplos para interpretar lo que esto significa. Si $a = 3$, ¿qué es entonces $|a|$? El entero 3 tiene un opuesto, $^{-}3$; y 3 y $^{-}3$ forman un par de opuestos. De éstos, 3 es no negativo (realmente, positivo) y $^{-}3$ es negativo. Por tanto, de acuerdo con la definición anterior, $|3| = 3$. Por otra parte, supongamos que nos interesa identificar a $|^{-}10|$. El entero $^{-}10$ tiene un opuesto, 10; y 10 es el elemento no negativo del par 10 y $^{-}10$. Por tanto, de acuerdo con la definición, $|^{-}10| = 10$.

GRUPO DE EJERCICIOS 5

1. Complétense las igualdades:

a) $|^{-}3| =$ ______ **c)** $|4 - 3| =$ ______
b) $|0| =$ ______ **d)** $|9| =$ ______

2. ¿Cuál flecha representa al entero con mayor valor absoluto:

a) Una flecha trazada desde $^{-}3$ a 7 o una flecha trazada desde 3 a 7?
b) Una flecha trazada desde 9 a $^{-}1$ o una flecha trazada desde 9 a 1?
c) Una flecha trazada desde 0 a 4 o una flecha trazada desde $^{-}6$ a 0?
d) Una flecha trazada desde 6 a $^{-}2$ o una flecha trazada desde $^{-}2$ a $^{-}6$?

3. Escríbase el valor de cada una de las siguientes expresiones:

a) $|17|$ **c)** $|^{-}7| + |3|$
b) $|^{-}10|$ **d)** $|^{-}6| \times |^{-}11|$

4. Escríbase el valor de cada una de las siguientes expresiones:

a) $^{\circ}|2|$ **c)** $|^{\circ}3|$
b) $^{\circ}|^{-}4|$ **d)** $|^{\circ}(^{-}7)|$

5. Complétese la siguiente frase: si el entero a no es cero y si $|a| = a$, entonces a debe ser un entero ____________.

6. Complétese la siguiente frase: si el entero a no es cero y si $|a| = {}^{\circ}a$, entonces a debe ser un entero ____________.

Orden en el conjunto de los enteros

En la página 13 hicimos observar que el conjunto de los números plenos es ordenado. Esta propiedad se refleja sobre la recta de los números en la posición relativa de las gráficas de los números plenos: de los dos números plenos a y b, la gráfica del mayor se encuentra a la derecha de la gráfica del menor en la recta de los números (fig. 13). Retengamos esta noción de la posición de las gráficas de dos números como criterio para establecer el orden de dos números y definamos el orden en el conjunto de los enteros como sigue:

$a > b$

FIGURA 13

> *si a y b son enteros, entonces a > b si y sólo si la gráfica de a se encuentra a la derecha de la gráfica de b sobre una recta numérica horizontal.*

Así pues, al mirar a la figura 14, es inmediato ver que $^{-}4$ es mayor que $^{-}5$, $^{-}1$ es mayor que $^{-}4$, y 0 *es mayor que cualquier entero negativo.*

Una forma alternativa, pero equivalente, de definir el orden en el conjunto de los enteros, aparecerá en la página 61, después de que hayamos definido la adición y la substracción en este conjunto.

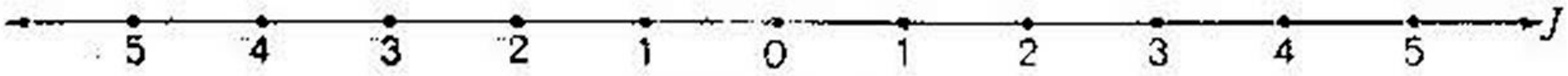


FIGURA 14

Como antes hicimos notar, los símbolos $<$ y $>$ significan "es menor que" y "es mayor que", respectivamente. Otros dos símbolos frecuentemente usados al tratar del orden son $\leq$ (lo que se lee: "es igual o menor que") y $\geq$ (lo que se lee: "es igual o mayor que"). Cada uno de estos símbolos es una condensación de dos proposiciones relacionadas por la conjunción *o*. Tenemos en efecto que:

$$a \leq b$$

quiere decir que

$$a < b \quad \text{o} \quad a = b$$

y

$$a \geq b$$

quiere decir que

$$a > b \quad \text{o} \quad a = b.$$

Cuando el lector ve proposiciones tales como $6 \leq 8$, debe saber que no hay intención alguna de afirmar que 6 es igual a 8. La proposición es una proposición verdadera porque solamente una de las proposiciones,

$$6 < 8 \quad \text{o} \quad 6 = 8$$

necesita ser cierta para que la proposición combinada sea cierta; y $6 < 8$ evidentemente es verdad. Análogamente, $8 \leq 8$ es una proposición verdadera, no porque $8 < 8$ sea verdad (no lo es), sino porque $8 = 8$ es verdad; $8 \leq 8$ afirma simplemente que una u otra de las proposiciones, $8 < 8$ u $8 = 8$, es cierta.

Se pueden usar símbolos de orden para identificar variables que representan solamente enteros positivos en lugar de enteros cualesquiera. Así, por ejemplo, si a representa un entero, entonces la proposición

$$a > 0$$

significa que a representa un entero *positivo*, porque solamente los enteros positivos son mayores que 0. Análogamente, decir que a representa un entero y que

$$a < 0$$

quiere decir que a representa un entero *negativo,* porque solamente los enteros negativos son menores que 0. Pero si a representa un entero, entonces la proposición

$$a \geq 0$$

no nos puede asegurar que a represente un número positivo, pues puede ser que represente a 0. Lo que esta proposición afirma es que a representa a un entero *no negativo;* es decir, que a representa un entero que no es negativo. Análogamente, si a representa un entero y si

$$a \leq 0,$$

entonces a representa un entero negativo o 0. En este caso se dice que a representa un entero *no positivo.*

Toda la anterior discusión sobre enteros positivos, negativos, no positivos y no negativos, se ha basado en el hecho de que los conjuntos J^+, $\{0\}$ y J^- son ajenos, pero constituyen todo J; es decir, cada entero pertenece a uno y sólo uno de estos conjuntos.

Decir que un entero a es negativo, es decir que es un elemento de J^- y no un elemento de $\{0\}$ o J^+. Decir que un entero es no negativo es decir que *no* es un elemento de J^-; por tanto, es 0 o es un elemento de J^+. Para enteros en general, tenemos la misma *propiedad de tricotomía del orden* (véase el cuaderno 2: *Números enteros*) que tenemos en W. Por tanto:

> *si a y b son enteros, entonces una y solamente una de las siguientes proposiciones es cierta:* $a < b, a = b$ o $a > b$.

GRUPO DE EJERCICIOS 6

1. ¿Cuál es la diferencia entre el significado del término "no negativo" y el significado del término "positivo"?

2. ¿Cuál es la diferencia entre el significado del término "no positivo" y el significado del término "negativo"?

3. En cada uno de los siguientes pares de enteros, ¿cuál es el mayor entero?

a) $^-14$, 14	**d)** $^-2$, 6
b) 5, $^-5$	**e)** 9, 0
c) 0, $^-7$	**f)** 3, $^-7$

4. Estamos considerando dos enteros a y b. Si la proposición $a > b$ es verdadera, ¿qué proposición verdadera se puede hacer acerca de ^-a y ^-b?

5. Especifíquese cuál es la lectura que marca la temperatura más cálida en cada una de las siguientes:

a) $60°, 50°$	**c)** $^{-}4°, 0°$
b) $10°, ^{-}5°$	**d)** $^{-}20°, ^{-}10°$

6. Ordénense los siguientes enteros de menor a mayor:

$$4,\ ^{-}8,\ 0,\ 6,\ ^{-}5$$

7. Úsense los símbolos $<$, $>$, o $=$ de modo que resulten ciertas cada una de las siguientes proposiciones.

a) Si $a > 0$, entonces $^{-}a \,\square\, 0$.
b) Si $a < 0$, entonces $^{-}a \,\square\, 0$.
c) Si $a = 0$, entonces $^{-}a \,\square\, 0$.

8. Márquese en cada una de las proposiciones que siguen si es verdadera (V) o falsa (F).

a) Todo entero negativo es menor que todo entero positivo. ____
b) El opuesto de todo entero es menor que el propio entero. ____
c) Cero es un entero no negativo. ____
d) Todo entero es un entero no negativo. ____

9. Úsese uno de los símbolos $>$, $<$ o $=$ de modo que resulte verdadera cada una de las siguientes proposiciones.

a) $\lvert ^{+}7\rvert \,\square\, ^{-}7$	**c)** $\lvert ^{-}5\rvert \,\square\, 4$
b) $\lvert 3\rvert \,\square\, ^{-}13$	**d)** $\lvert 9\rvert \,\square\, \lvert ^{-}9\rvert$

10. Si se tiene $|n| = 2$, ¿se puede determinar a qué entero representa n?, ¿por qué sí o por qué no?

11. Márquese en cada una de las siguientes proposiciones si ésta es verdadera (V) o falsa (F).

a) $\lvert ^{-}2\rvert = 2$ ____	**d)** $\lvert 5\rvert = {}^{-}5$ ____
b) $\lvert ^{-}7\rvert < 7$ ____	**e)** $\lvert a\rvert \geq {}^{-}a$ ____
c) $\lvert 3\rvert = {}^{-}3$ ____	**f)** $\lvert 9\rvert < {}^{-}9$ ____

ADICIÓN DE ENTEROS

Suma de dos números plenos

Cuando los alumnos están aprendiendo por primera vez la operación de suma de dos números plenos, a menudo les ayuda a visualizar el concepto que combinen dos conjuntos de objetos familiares, tales como ladrillos o manzanas, y cuenten después el número de objetos en el conjunto unión. Por ejemplo, el hecho de que un conjunto de tres ladrillos combinado con otro conjunto de dos ladrillos produzca un conjunto de cinco ladrillos, hace físicamente significativa la proposición matemática $3 + 2 = 5$. Además, la combinación de tales conjuntos de diversas formas hace que el alumno pueda descubrir ciertas propiedades básicas de la adición en el conjunto de los números plenos. Mostramos estas propiedades en el cuadro I.

CUADRO 1

PROPIEDADES DE LA ADICIÓN EN EL CONJUNTO W DE LOS NÚMEROS PLENOS

Propiedad	Representación Física
1. De cierre o estabilidad EJEMPLO: $2 + 3 = 5$, y 5 es un número pleno.	1. Cuando dos conjuntos de bloques se combinan el resultado es un conjunto de bloques.
2. Conmutatividad EJEMPLO: $2 + 3 = 3 + 2$	2. Al combinar un conjunto de dos bloques con un conjunto de otros tres bloques, se produce el mismo conjunto que se obtiene al combinar el conjunto de tres bloques con el conjunto de dos bloques.
3. Asociatividad EJEMPLO: $(2 + 3) + 1 = 2 + (3 + 1)$	3. Al combinar un conjunto de dos bloques con un conjunto de tres bloques y añadir luego un conjunto de 1 bloque más, produce el mismo conjunto que se obtiene al combinar el conjunto de tres bloques con el conjunto de un bloque y añadir luego todo el conjunto resultante al conjunto de dos bloques.
4. Identidad aditiva (propiedad aditiva del 0) EJEMPLO: $3 + 0 = 3$	4. La combinación de un conjunto de tres bloques con un conjunto de ningún bloque produce un conjunto de tres bloques.

Vemos, pues, que el proceso de combinar dos conjuntos de bloques provee un modelo físico del concepto matemático de adición de dos números plenos. Recíprocamente, el proceso de sumar dos números plenos puede considerarse un modelo matemático del proceso físico de combinación de dos conjuntos de bloques. Algunos otros ejemplos de cómo la operación de adición se relaciona con el mundo físico, nos lo proporcionan la combinación de distancias entre ciudades en un viaje o la de centavos de dos alcancías.

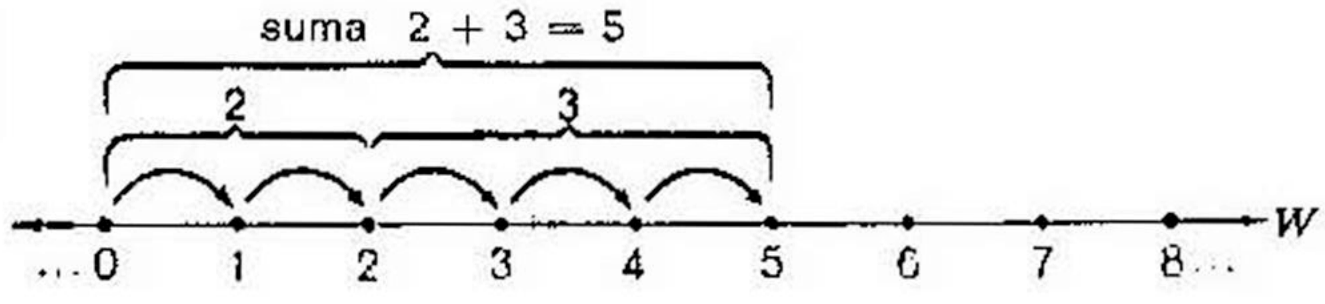


FIGURA 15

La recta de los números ofrece un modelo visual particularmente claro y sencillo de la operación matemática de adición. La figura 15 muestra cómo se puede representar gráficamente la suma 2 + 3 comenzando en el origen y contando a la derecha un número de intervalos unitarios correspondientes al primer sumando, 2. Desde ese punto se continúa contando a la derecha el número de intervalos unitarios correspondiente al segundo sumando, 3. La coordenada del punto que así se alcanza será 5. Este modelo ilustra cómo la suma de 2 y 3 es 5.

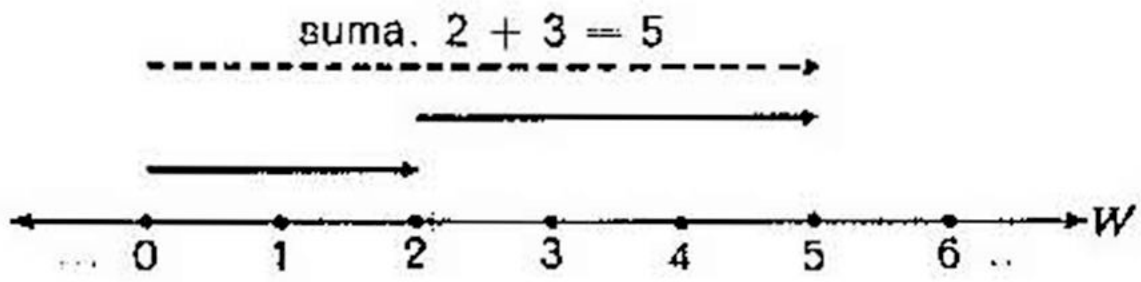


FIGURA 16

Hay todavía otro modelo de la adición que incluye la representación mediante flechas de los números plenos. Por ejemplo, para mostrar la suma de 2 + 3, la cola de la flecha que representa el primer sumando está directamente sobre el origen, y la cabeza de la flecha directamente sobre el punto de coordenada 2, de modo que la flecha está en posición estándar. Entonces la flecha para el segundo sumando comienza directamente sobre la cabeza de la primera flecha y se extiende directamente tres unidades más hacia la derecha (véase la figura 16). Finalmente, la flecha de trazo interrumpido en posición estándar representa la suma. Comienza en el origen y se extiende a un punto directamente sobre la cabeza de la segunda flecha. Como esta flecha tiene 5 unidades de longitud, tenemos

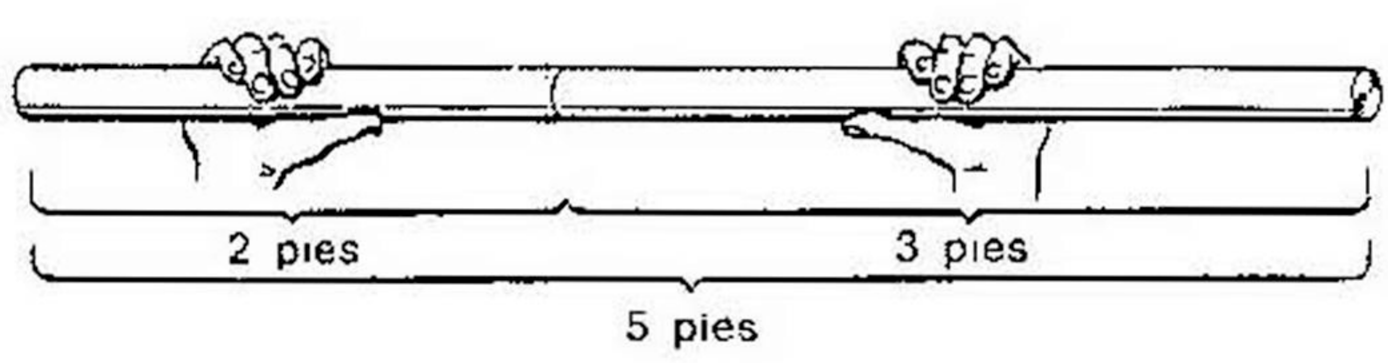


FIGURA 17

una representación gráfica del hecho de que $2 + 3 = 5$. En lugar de contar intervalos y combinarlos como en el modelo previo, el modelo de la flecha combina dos segmentos rectilíneos que tienen longitudes que se corresponden con los dos sumandos. La idea última es muy parecida a poner juntos un bastón o vara de 2 metros y otra de 3 metros para formar una vara de 5 metros de largo (fig. 17).

GRUPO DE EJERCICIOS 7

1. Represéntese cada una de las siguientes sumas sobre una recta numérica mediante el dibujo de flechas representativas.

a) $7 + 3$ **b**) $3 + 7$

2. Obsérvese el diagrama que se ha hecho en el ejercicio 1.

a) ¿Cuál es el primer par de sumandos?
b) ¿Cuál es el segundo par de sumandos?
c) ¿En qué se parecen o son análogos los dos pares de sumandos?
d) ¿En qué difieren los dos pares de sumandos?
e) ¿Qué es lo que se observa respecto a los nombres que se encuentran para las dos sumas?

3. Represéntese cada una de las siguientes sumas sobre una recta numérica mediante el dibujo de flechas representativas.

a) $(4 + 3) + 5$ **b**) $4 + (3 + 5)$

4. Véase el diagrama dibujado para el ejercicio 3.

a) ¿Cuál fue el resultado de sumar 3 a 4?
b) ¿Cuál fue el resultado de adicionar 5 a esta suma?
c) ¿Cuál fue el resultado de sumar 5 a 3?
d) ¿Cuál es el resultado de adicionar esta suma a 4?
e) ¿Qué es lo que el lector ha notado respecto a los resultados de los ejercicios 4*b* y 4*d*?

5. Represéntese la suma $7 + 0$ sobre una recta numérica mediante el dibujo de un diagrama de flechas.

6. Véase el diagrama de flechas para el ejercicio 5. ¿Qué es lo que se nota sobre la redenominación de $7 + 0$?

7. Márquese si los siguientes juicios son verdaderos (V) o falsos (F).

a) Si se suman dos enteros positivos, la suma es siempre un entero positivo. ________
b) La suma de cualquier entero positivo y cero, es cero. ________

c) El orden en que se suman dos enteros positivos no puede cambiarse sin cambiar la suma. ______

d) La reagrupación de sumandos no cambia la suma de tres o más enteros positivos. ______

Suma de dos enteros negativos

La adición en el conjunto de los enteros está definida de un modo consistente con la adición de números plenos. La recta de los números servirá como modelo para hacer esta extensión de la noción de adición. En esta sección veremos cómo se hace esto cuando ambos sumandos son negativos. En la sección siguiente la extensión se completará considerando el caso en que uno de los sumandos es no negativo y el otro es negativo.

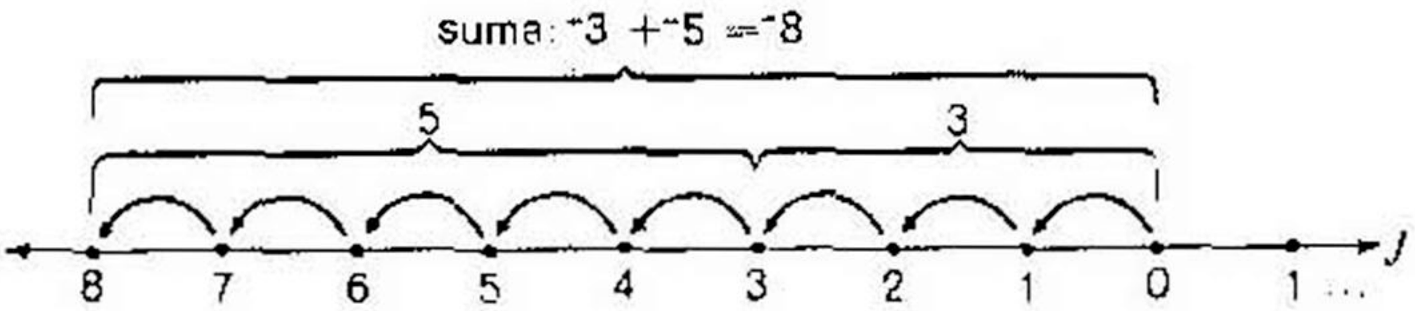


FIGURA 18

Exactamente de la misma manera que podemos representar la suma de dos enteros positivos sobre la recta de los números comenzando en el origen y contando intervalos unitarios a la derecha, de igual manera (por una extensión adecuada de la definición de adición) podemos sumar dos enteros negativos comenzando en el origen y contando intervalos unitarios hacia la izquierda. La figura 18 ilustra que la suma de $^{-}3$ y $^{-}5$ es $^{-}8$. Comenzamos en el origen y contamos 3 unidades a la izquierda y continuamos luego desde el punto a que hemos llegado 5 unidades más hacia la izquierda. El punto al que finalmente llegamos es la gráfica de $^{-}8$, que está localizado 8 unidades a la izquierda del origen.

Por medio de la representación con flechas, la figura 19 muestra el hecho de que $^{-}2 + {}^{-}6 = {}^{-}8$. Nótese que el procedimiento para representar la suma de dos números negativos por medio de flechas es el mismo que el

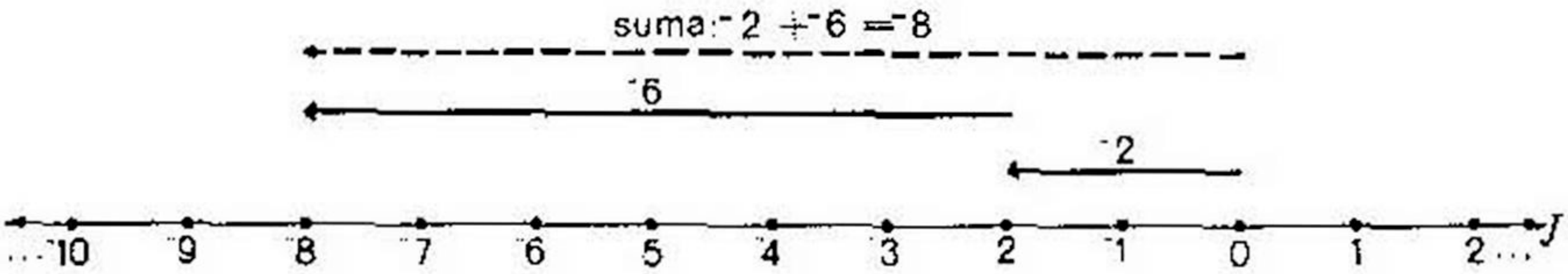


FIGURA 19

empleado para dos sumandos positivos, excepto en que en este caso las flechas apuntan, todas, hacia la izquierda.

Puesto que conteos sucesivos hacia la izquierda del origen siempre nos llevarán a un punto a la izquierda del origen, es evidente que la suma de dos enteros negativos es siempre un entero negativo. Además, el número de intervalos unitarios que contamos para un sumando entero dado es igual al valor absoluto de ese entero. Combinando estos dos hechos, veamos si podemos describir cómo encontrar la suma de dos enteros negativos cualesquiera en términos de sus valores absolutos. Consideremos, por ejemplo, la suma de $^{-}7$ y $^{-}8$. Para representar esta suma sobre la recta numérica, podríamos contar primero 7 unidades hacia la izquierda del origen, y luego 8 unidades más también hacia la izquierda. El número total de intervalos unitarios contados mediante este proceso sería igual a $7 + 8$. En términos de valores absolutos esto es $|^{-}7| + |^{-}8| = |15|$. Pero como el conteo se hizo hacia la izquierda, el punto que representa la suma tendrá la coordenada $^{\circ}(|^{-}7| + |^{-}8|)$, es decir, $^{-}15$. De donde podemos escribir

$$^{-}7 + ^{-}8 = ^{\circ}(|^{-}7| + |^{-}8|) = ^{-}15.$$

En general, podemos decir:

La suma de dos enteros negativos es igual al opuesto de la suma de sus valores absolutos.

Por ejemplo, para encontrar la suma $^{-}214 + ^{-}373$, sumamos $|^{-}214|$ y $|^{-}373|$ para obtener 587. Entonces, el opuesto de este número, esto es, $^{-}587$, es el número buscado; es decir,

$$^{-}214 + ^{-}373 = ^{-}587$$

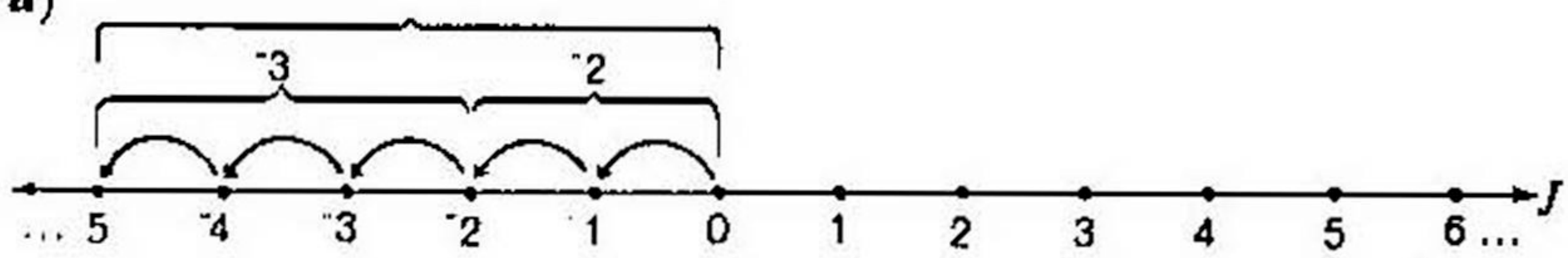
GRUPO DE EJERCICIOS 8

1. Úsese un entero para hacer cierta cada una de las siguientes igualdades.

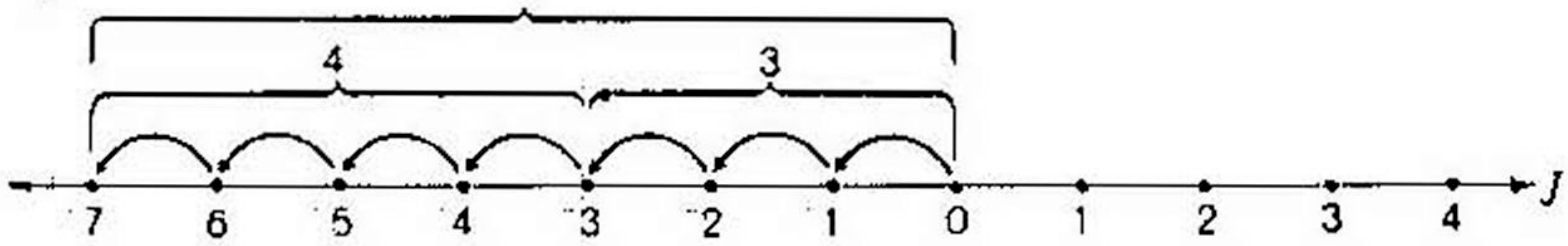
a) $|^{-}7| = \square$	**e)** $|^{-}7| + 8 = \square$
b) $|^{-}8| = \square$	**f)** $|^{-}5| + 2 = \square$
c) $|5| = \square$	**g)** $^{-}7 + ^{-}8 = ^{\circ}(7 + \square)$
d) $|2| = \square$	**h)** $^{-}1 + ^{-}6 = ^{\circ}(\square + 6)$

2. Estúdiense los diagramas que siguen; escríbase una proposición matemática relacionada con cada uno de ellos.

a)



b)

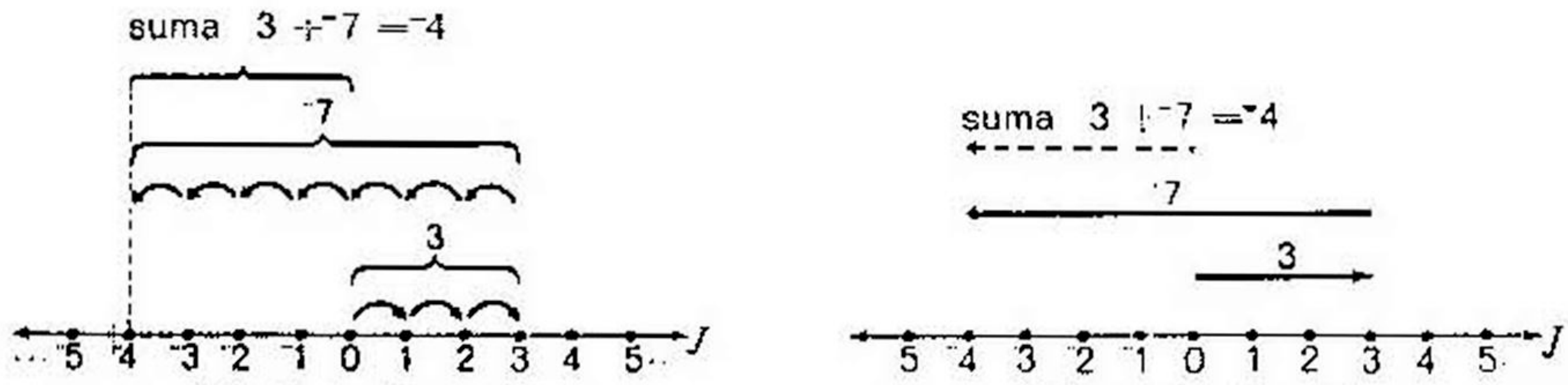


3. Redenomínense las siguientes sumas con nombres simples de enteros.

a) $^-43 + {}^-59$	**d)** $^-36 + {}^-97$	**g)** $^-936 + {}^-425$
b) $^-17 + {}^-18$	**e)** $^-28 + {}^-11$	**h)** $^-12 + {}^-957$
c) $^-427 + {}^-582$	**f)** $^-69 + {}^-75$	

Suma de un número pleno y un número negativo

Para definir la suma de un número pleno y un número negativo (es decir, de un entero no negativo y un entero negativo), como, por ejemplo, $3 + {}^-7$, podemos usar ya sea el proceso de contar intervalos unitarios a lo largo de la recta de los números como aparece en la figura 20(a), o la representación con flechas que mostramos en la figura 20(b).



(a) $3 + {}^-7 = {}^-4$ (b) $3 + {}^-7 = {}^-4$

FIGURA 20

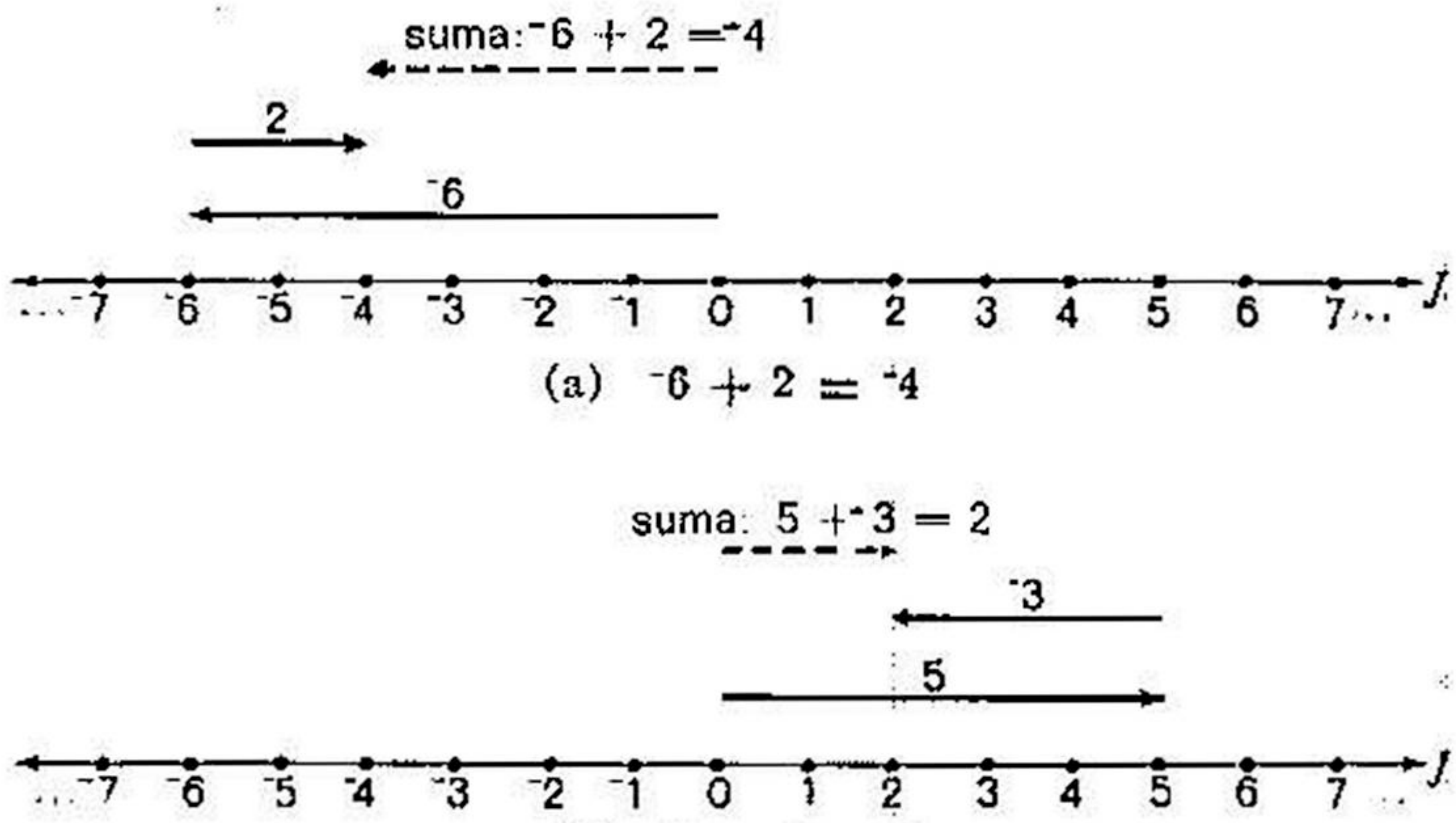
Como el lector puede ver en la figura 20(b), son de observarse ciertos rasgos generales en el proceso de adición gráfica con flechas:

1. Las flechas siempre apuntan a la derecha para sumandos positivos y a la izquierda para sumandos negativos.
2. La flecha para el primer sumando está en posición estándar. Comienza exactamente sobre la gráfica de cero.
3. La flecha para el segundo sumando comienza exactamente sobre la cabeza de la flecha para el primer sumando.
4. La flecha de traza interrumpida que representa la suma está en posición estándar. Comienza sobre la gráfica de cero y termina exactamente sobre la cabeza o extremo de la flecha para el segundo suman-

do. La suma nos la da la coordenada directamente debajo del extremo de la flecha de trazo interrumpido.

5. Debemos pensar en las flechas como si estuvieran realmente sobre la recta numérica, desde luego. Se muestran arriba de la recta solamente para una visualización más fácil.

Ya sea que se emplee el conteo o la representación por medio de flechas tal como puede verse en las figuras 20(*a*) y 20(*b*), el procedimiento es el mismo que el que usamos anteriormente para la suma de dos enteros positivos o dos enteros negativos. En este caso, sin embargo, los dos conteos o las dos flechas de los sumandos van en direcciones opuestas. Resultado de ello es que la coordenada de la suma puede ser positiva, negativa o el cero. En general, la suma de un entero positivo y un entero negativo es positiva o negativa según que el entero de mayor valor absoluto sea positivo o negativo. Si los dos sumandos tienen el mismo valor absoluto, la suma es 0.



(a) $^-6 + 2 = {^-4}$

(b) $5 + {^-3} = 2$

FIGURA 21

La figura 21 muestra la representación por medio de flechas de las sumas $^-6 + 2$ y $5 + {^-3}$. Puede verse que en ambos casos el valor absoluto de la longitud de la flecha para la suma es simplemente la *diferencia* entre los valores absolutos de las longitudes de las flechas para los dos sumandos. En la suma $^-6 + 2$, las flechas para los dos sumandos tienen longitudes $|^-6|$ y $|2|$, respectivamente. La flecha de la suma tiene entonces una longitud igual a $|^-6| - |2| = 4$. En la suma $5 + {^-3}$, las flechas de los sumandos tienen respectivamente longitudes $|5|$ y $|^-3|$. De donde la flecha de la suma tiene como longitud $|5| - |^-3| = 2$. En cualquiera de los casos, la flecha para la suma tiene la misma *dirección* que la flecha que representa el sumando que tiene el mayor valor absoluto.

He aquí dos ejemplos más de sumas análogas:

EJEMPLO 1: $^-15 + 8 =$ ——

La flecha más larga tiene longitud 15
La flecha más corta tiene longitud 8
La flecha de la suma tiene longitud 7
La flecha más larga tiene dirección negativa.
La flecha de la suma tiene dirección negativa.

Por tanto: $^-15 + 8 = {^-7}$.

EJEMPLO 2: $25 + {^-17} =$ ——

La flecha más larga tiene longitud 25
La flecha más corta tiene longitud 17
La flecha de la suma tiene longitud 8
La flecha más larga tiene dirección positiva.
La flecha de la suma tiene dirección positiva.

Por tanto: $25 + {^-17} = 8$.

Como la longitud de una flecha es igual al valor absoluto del entero que representa, podemos resumir los hechos anteriores de modo que podamos definir la suma de un entero no negativo y un entero negativo en términos de valor absoluto, como sigue:

1. El valor absoluto de la suma de un entero no negativo y un entero negativo es el número pleno igual a la diferencia entre los valores absolutos de los sumandos (restando el menor del mayor).
2. Si el sumando de mayor valor absoluto es positivo, entonces la suma es positiva. Si el sumando de mayor valor absoluto es negativo, entonces la suma es negativa. Si los dos sumandos, uno positivo y negativo el otro, tienen el mismo valor absoluto, la suma es cero; por ejemplo, $5 + {^-5} = 0$.

Aquí están dos ejemplos de cómo determinar sumas por la aplicación de estos dos principios.

EJEMPLO 3: Simplifíquese la suma: $^-28 + 3$.

a) $$\begin{aligned} |{^-28} + 3| &= |{^-28}| - |3| \\ &= 28 - 3 \\ &= 25 \end{aligned}$$

b) Como $|{^-28}| > |3|$, La suma es negativa.

Por tanto: $^-28 + 3 = {^-25}$.

EJEMPLO 4: Simplifíquese la suma: $19 + {}^{-}11$.

$a)$ $|19 + {}^{-}11| = |19| - |{}^{-}11|$

$= 19 - 11$

$= 8.$

$b)$ Como $|19| > |{}^{-}11|$, la suma es positiva,

Por tanto: $19 + {}^{-}11 = 8$.

Las aplicaciones de la adición de enteros se encuentran con gran frecuencia. Si representamos los depósitos bancarios en pesos usando enteros positivos y los retiros usando enteros negativos, entonces la identificación del balance en la cuenta es cuestión de sumar todos los depósitos (positivos) con todos los retiros (negativos). En la próxima sección veremos que el orden en que los términos se suman no afecta a la suma. Por ejemplo, si hacemos depósitos en nuestra cuenta de \$150, \$200 y \$50, y retiramos de ella \$70, \$80 y \$130, entonces el número de pesos en el estado de cuenta será

$$150 + 200 + 50 + {}^{-}70 + {}^{-}80 + {}^{-}130,$$

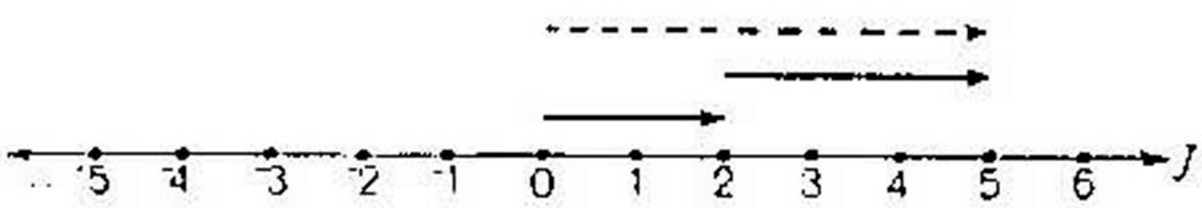
es decir, el balance sería de \$120.

Veamos otro ejemplo. Los grados en que determinada temperatura atmosférica sube o baja pueden representarse por medio de números positivos y negativos. Si la temperatura en determinado lugar es ${}^{-}5°$ y si posteriormente baja 6 grados, entonces la temperatura resultante se obtiene calculando ${}^{-}5 + {}^{-}6 = {}^{-}11$. La temperatura resultante es pues de ${}^{-}11°$.

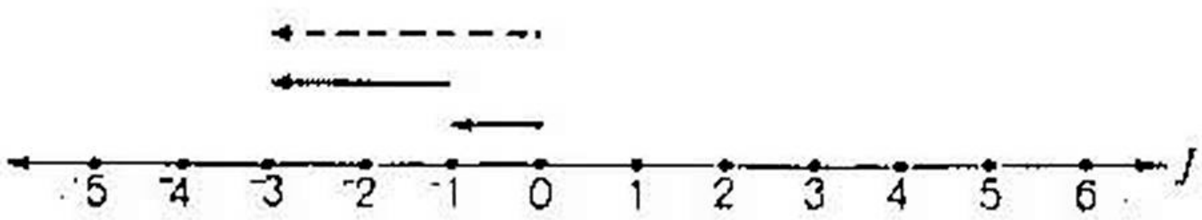
GRUPO DE EJERCICIOS 9

Estúdiense los diagramas que aparecen abajo. Escríbase una igualdad matemática para cada uno de ellos.

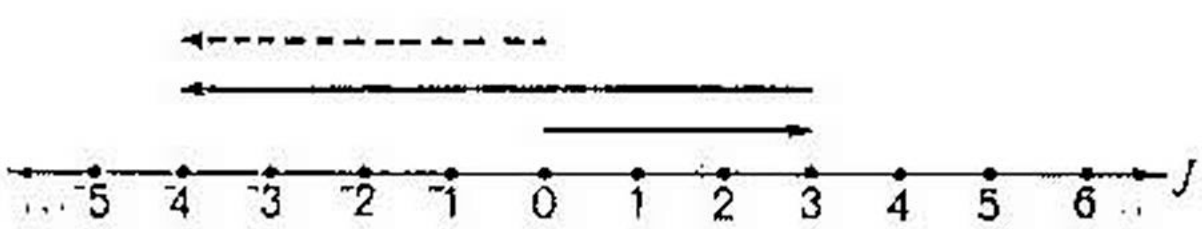
1.



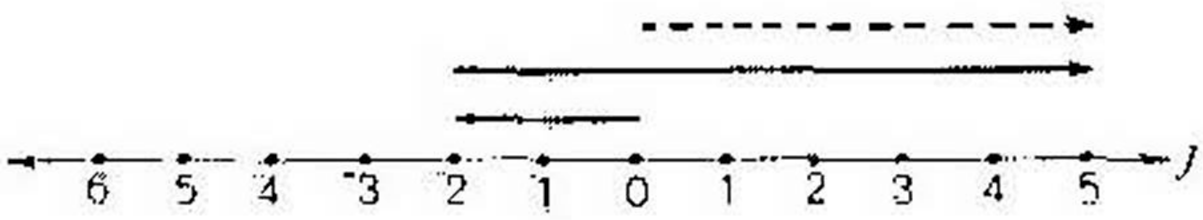
2.



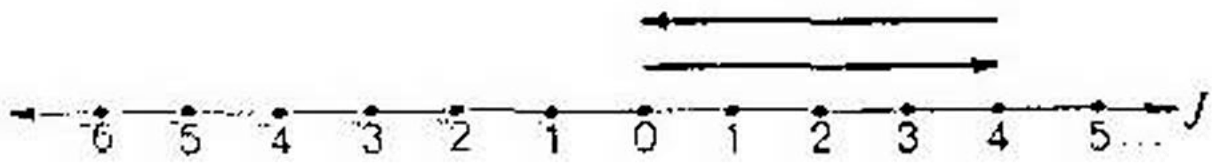
3.



4.



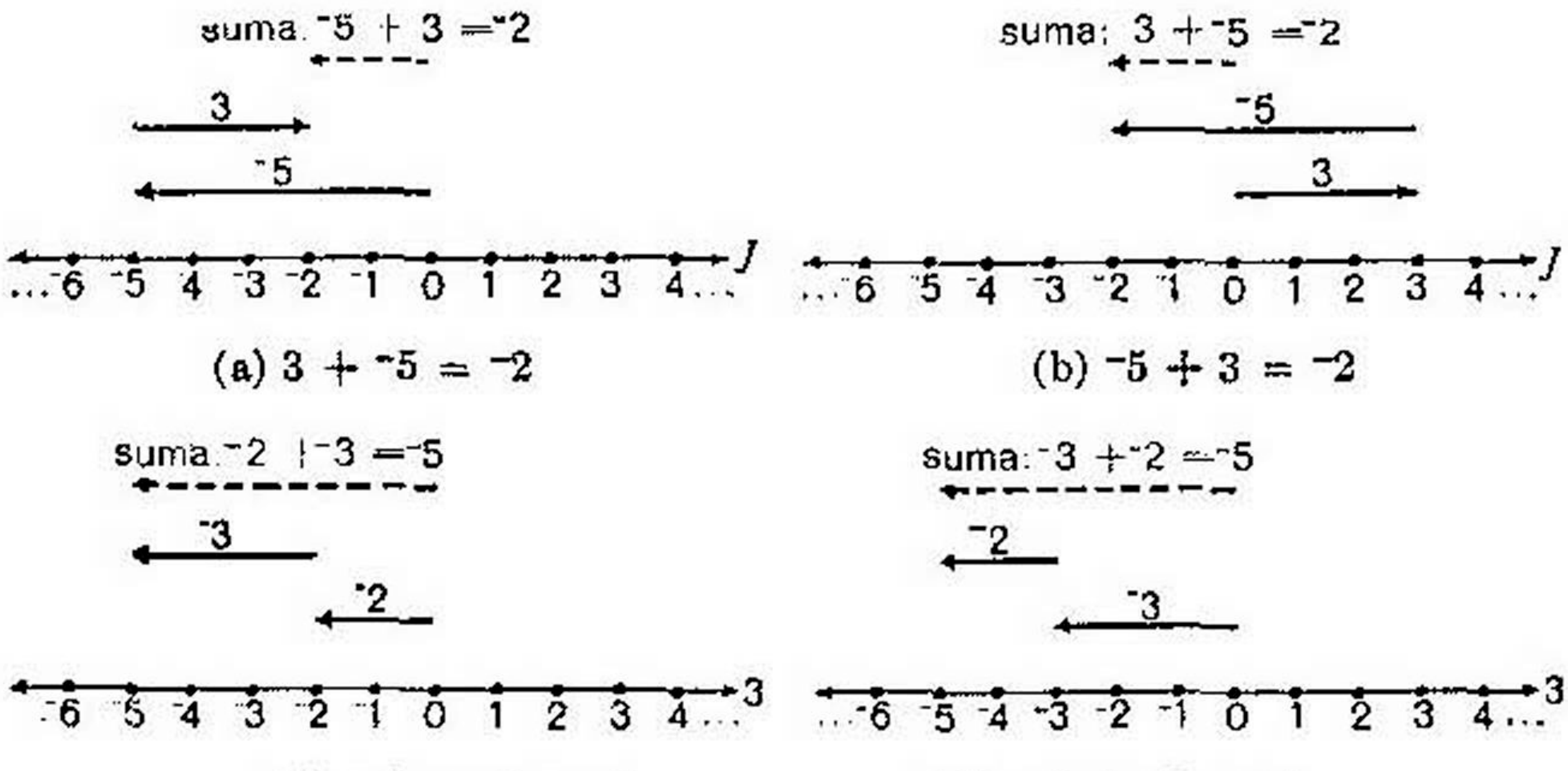
5.



6.

Propiedades de la adición en el conjunto de los enteros

En la página 30 hicimos la observación de que la adición de números plenos, y por tanto la de los enteros no negativos, tenía las propiedades de cierre, conmutatividad y asociatividad, y que el cero, 0, sirve como elemento idéntico para la adición porque $n + 0 = n$ para todo entero no negativo n. Bien mediante el modelo de conteo, bien el de las flechas, que usamos para definir la adición en el conjunto J de los enteros, podemos presentar ejemplos que nos muestren cómo estas propiedades son ciertas para *todos* los enteros. El diagrama de las flechas resulta, sin embargo, demasiado complicado para el caso de la propiedad asociativa. Por ello, en lugar de trazar dibujos para ilustrar esta propiedad, lo que haremos



(a) $3 + {}^-5 = {}^-2$ (b) ${}^-5 + 3 = {}^-2$

(c) ${}^-2 + {}^-3 = {}^-5$ (d) ${}^-3 + {}^-2 = {}^-5$

FIGURA 22

será simplemente presentar ejemplos numéricos; el lector puede, como ejercicio, trazar los diagramas correspondientes.

Como todo entero puede representarse por una flecha y como la combinación de dos flechas cualesquiera en la forma anteriormente descrita determinará otra flecha que representará a su vez un entero, parece razonable concluir que la adición es cerrada en J —es decir, que la suma de dos enteros cualesquiera es un entero.

Las figuras 22(a) y 22(b) muestran que la suma $3 + {}^-5$ es igual a la suma ${}^-5 + 3$, ambas son iguales a ${}^-2$; las figuras 22(c) y 22(d) muestran que las sumas ${}^-2 + {}^-3$ y ${}^-3 + {}^-2$ son, ambas, iguales entre sí y a ${}^-5$. Estas figuras, junto con el hecho de que la adición de los enteros no negativos es conmutativa, ilustran que la adición de enteros es conmutativa.

Considérense ahora las dos sumas

$$(3 + {}^-2) + 4 \quad \text{y} \quad 3 + ({}^-2 + 4).$$

Después de simplificarlas, nos encontramos con que

$$\begin{array}{rl|rl} (3 + {}^-2) + 4 & = 1 + 4 & 3 + ({}^-2 + 4) & = 3 + 2 \\ & = 5, & & = 5. \end{array}$$

De donde,

$$(3 + {}^-2) + 4 = 3 + ({}^-2 + 4).$$

Veamos otro ejemplo. Tenemos,

$$\begin{array}{rl|rl} ({}^-2 + 3) + {}^-4 & = 1 + {}^-4 & {}^-2 + (3 + {}^-4) & = {}^-2 + {}^-1 \\ & = {}^-3 & & = {}^-3. \end{array}$$

Por tanto,

$$({}^-2 + 3) + {}^-4 = {}^-2 + (3 + {}^-4).$$

Los dos ejemplos anteriores ilustran que la adición es asociativa para todos los enteros.

El hecho de que la flecha que representa a 0 es una flecha-punto, es decir, una flecha de longitud 0, nos sugiere que la combinación de esta flecha con cualquiera otra flecha dada en la forma que hemos descrito anteriormente, dará como resultado simplemente a la flecha dada. Esto, a su vez, nos sugiere que para todo entero a, $a + 0 = a$.

Para resumir, hemos ilustrado las siguientes propiedades de la adición, que se verifican para todos los enteros.

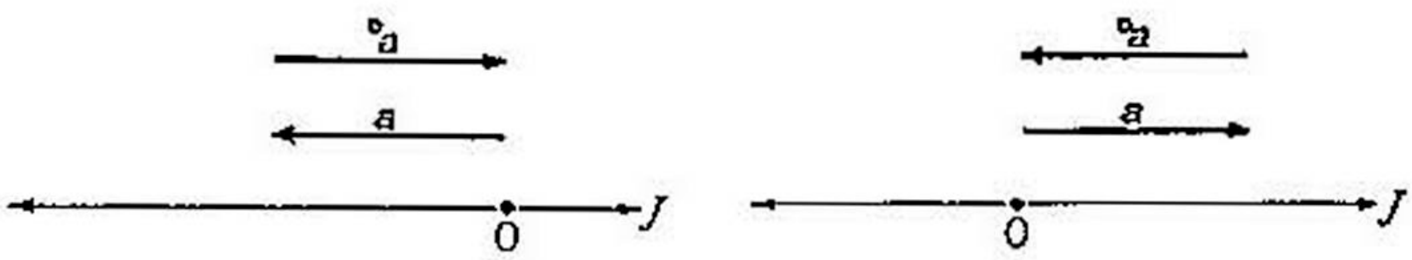
1. *Propiedad de cierre*: Si a, b y c son enteros, entonces $a + b$ es un entero.
2. *Propiedad conmutativa*: Si a, b y c son enteros, entonces $a + b = b + a$.

3. *Propiedad asociativa*: Si a, b y c son enteros, entonces $(a + b) + c = a + (b + c)$.
4. *Identidad aditiva*: Si a, b y c son enteros, entonces $a + 0 = a$.

El término "identidad aditiva", cuando se aplica a la propiedad $a + 0 = a$, nace del hecho de que añadiendo 0 a un entero dado lo que resulta es idénticamente el entero dado. De acuerdo con ello, a 0 se le llama *elemento identidad aditiva* en J. La propiedad de que $a + 0 = 0 + a = a$, se llama, a veces, la *propiedad de adición* de 0.

Como el lector habrá observado, las cuatro propiedades arriba enumeradas son exactamente las mismas que las propiedades de adición en el conjunto de los números plenos. En el conjunto de los enteros, sin embargo, la adición tiene una propiedad particularmente útil que no tiene en el conjunto de los números plenos.

Las figuras 23(a) y 23(b) ilustran esta propiedad de la adición en el conjunto de los enteros. Puede decirse que para todo número entero hay uno,



(a) $a < 0$ (b) $a > 0$

FIGURA 23

y sólo un entero, cuya suma con el entero dado es 0. Desde luego, como sugieren las figuras 23(a) y 23(b), estos enteros son opuestos. Esta propiedad puede enunciarse formalmente como sigue:

5. *Inverso aditivo*: Si a es un entero, entonces existe un único entero

$$^{\circ}a \text{ tal que } a + {}^{\circ}a = 0.$$

Esto expresa la *propiedad del inverso aditivo* para los enteros. Cada uno de los enteros a y $^{\circ}a$ se llama *inverso aditivo* del otro. Esto, incidentalmente, nos proporciona una nueva denominación para el "opuesto" de un número (a saber, la expresión "inverso aditivo" del número). Así pues, "el opuesto de $^{-}5$" y "el inverso aditivo de $^{-}5$" denominan ambas al mismo número, 5.

La propiedad del inverso aditivo y la ley asociativa pueden usarse para simplificar sumas de ciertos enteros. Por ejemplo, consideremos la suma $10 + {}^{-}18$. Como el lector sabe que $^{-}18 = {}^{-}10 + {}^{-}8$, podemos escribir:

$$\begin{aligned} 10 + {}^-18 &= 10 + ({}^-10 + {}^-8) \\ &= (10 + {}^-10) + {}^-8 && \text{(según la propiedad asociativa)} \\ &= 0 + {}^-8 && \text{(según la ley del inverso aditivo)} \\ &= {}^-8. \end{aligned}$$

Presentamos ahora dos ejemplos más del uso de la propiedad del inverso aditivo:

$$\begin{aligned} {}^-7 + 16 &= {}^-7 + (7 + 9) \\ &= ({}^-7 + 7) + 9 \\ &= 0 + 9 \\ &= 9. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^-18 + 5 &= ({}^-13 + {}^-5) + 5 \\ &= {}^-13 + ({}^-5 + 5) \\ &= {}^-13 + 0 \\ &= {}^-13. \end{aligned}$$

GRUPO DE EJERCICIOS 10

1. Úsese un diagrama sobre una recta numérica como ayuda para encontrar un valor para n en cada uno de los casos siguientes:

a) ${}^-4 + {}^-11 = n$ **d)** $3 + {}^-5 = n$
b) $7 + 15 = n$ **e)** ${}^-7 + 0 = n$
c) ${}^-9 + 2 = n$ **f)** ${}^-8 + 8 = n$

2. Vuélvase a denominar cada entero de los de la columna A emparejándolo con otro entero de los de la columna B.

	Columna A	*Columna B*
a)	$7 + 3$	${}^-11$
b)	${}^-2 + {}^-9$	${}^-3$
c)	$5 + {}^-3$	0
d)	${}^-4 + 1$	10
e)	${}^-6 + 6$	5
f)	$5 + 0$	2

3. Supongamos que el lector tiene un saldo de \$50.00 en su cuenta bancaria. Convengamos en que los enteros positivos representan depósitos y los enteros negativos retiros de fondos. Complétese la pregunta matemáticamente equivalente "50 + . . . = ?", y encuéntrese en cada caso cual es el estado de la cuenta si el lector ha

a) depositado \$6.00;
b) depositado \$7.00 y retirado \$10.00;
c) depositado \$15.00 y retirado \$8.00;
d) depositado \$9.00 y luego retirado \$6.00;
e) retirado \$28.00 y luego depositado \$18.00;
f) depositado \$11.00 y retirado luego \$11.00.

4. Complétese el cuadriculado para hechos básicos de la adición en el conjunto de los enteros. Unas pocas sumas, por ejemplo, $2 + 5 = 7$ y $^{-}3 + {}^{-}4 = {}^{-}7$ aparecen ya en él.

Segundo sumando

Primer sumando

									9									
									8									
									7									
									6									
									5		7							
		-3							4									
							1		3									
									2					7				
									1									
-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
									-1									
									-2			1						
									-3									
						-7			-4									
									-5			-2						
									-6									
									-7									
									-8									
									-9									

5. Úsese la tabla de hechos básicos sobre la adición del ejercicio 4 como ayuda para completar las siguientes proposiciones.

a) La suma de cero y cualquier entero k es ______.

b) La suma de cualquier par de opuestos es ______.
c) Cuando se suman dos enteros, el resultado es siempre un ______.
d) El orden en que se sumen dos enteros no cambia el ______.
e) La suma de $^-2$ y 3 es ______.
f) La suma de $^-1$ y 4 es ______.
g) La suma de 3 y 4 es ______.
h) La suma de $^-2$ y 7 es ______.
i) La suma de $(^-2 + 3)$ y 4 es ______.
j) La suma de $^-2$ y $(3 + 4)$ es ______.

MULTIPLICACIÓN DE ENTEROS

Producto de dos números plenos

Como antes indicamos, el alumno aprende primero la operación de sumar números plenos mediante la combinación de conjuntos de objetos familiares, como, por ejemplo, bloques o manzanas. Esta ilustrativa experiencia se extiende a la operación de multiplicación de números plenos mediante la consideración de sumas de sumandos iguales. Nos lleva esto al descubrimiento de las propiedades básicas de la multiplicación en el conjunto de los números plenos, propiedades que discutimos en el cuaderno 2: *Números enteros.*

1. *Propiedad de cierre*: el producto de dos números plenos cualesquiera es un número pleno bien determinado.
2. *Propiedad conmutativa*: Si a y b son dos números plenos cualesquiera, entonces $a \times b = b \times a$.
3. *Propiedad asociativa*: Si a, b y c son números plenos cualesquiera, entonces $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.
4. *Elemento identidad*: uno es el elemento identidad para la multiplicación; para cualquier número pleno n, $n \times 1 = 1 \times n = n$.
5. *Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición*: Si a, b y c son números plenos cualesquiera, entonces $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$.
6. *Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la substracción*: Si a, b y c son números enteros cualesquiera y $b - c$ es un número pleno, entonces $a \times (b - c) = (a \times b) - (a \times c)$.

7. *Propiedad multiplicativa del cero*: Si a y b son números plenos cualesquiera, entonces $ab = 0$ si y sólo si al menos uno de los factores, a o b, es 0.

Veremos ahora como es que la operación de multiplicación puede extenderse al conjunto de los enteros en su totalidad de un modo consistente, razonable y útil.

Producto de un número pleno y un entero negativo

Si en la marcha de un negocio hay una erogación diaria de \$20 para cierto propósito particular, entonces en los libros de contabilidad de la compañía esto puede representarse mediante el uso del entero $^-20$. Pero si las erogaciones tuvieran que entrar en cuenta sólo por semana, entonces para una semana de trabajo de cinco días el total de tales erogaciones sería representado por la suma

$$^-20 + {}^-20 + {}^-20 + {}^-20 + {}^-20.$$

Esta suma es, desde luego, $^-100$, de manera que lo que asentaríamos en los libros sería simplemente $^-\$100$.

Ciertamente parece que sería ventajoso que en lugar de trabajar con la suma

$$^-20 + {}^-20 + {}^-20 + {}^-20 + {}^-20$$

pudiéramos, como ocurre cuando sólo nos ocupamos de las ganancias, usar un producto. Es decir, exactamente como cuando se ganan \$20 por día, el salario semanal para una semana de cinco días es igual a 5×20, es decir, a \$100, tendría sentido decir que, gastando \$20 por día, lo que resulta para cinco días es un gasto total de 5×20, es decir, de \$100. En términos de enteros negativos, esto implicaría que

$$5 \times {}^-20 = {}^-100.$$

Y es esto ciertamente lo que se conviene. Con más amplitud, esta forma de razonar sugiere insistentemente que el producto de un entero positivo y un entero negativo debe ser un número negativo.

Volvamos a la recta de los números como guía para seguir más adelante en este asunto. La figura 24 nos muestra el diagrama de flechas que describe la suma de cinco números plenos, es decir, de $2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$.

Como sabemos que para números plenos $2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 5 \times 2$, y como nuestros enteros no negativos no son más que los números plenos con otro nombre, podemos convenir en que, por definición, la descripción mediante flechas de la figura 24 se aplica también a los enteros no negativos.

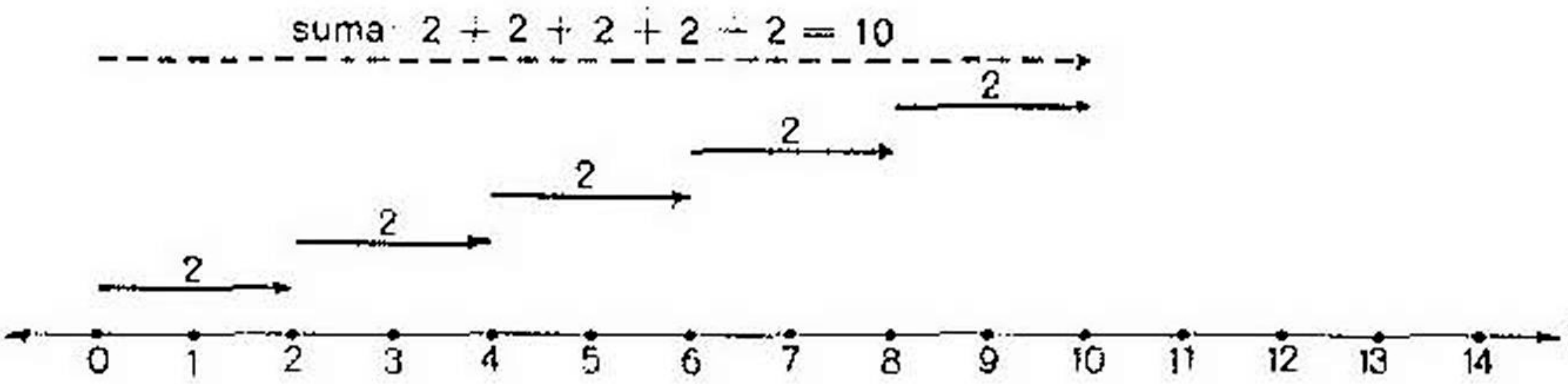


FIGURA 24

Así pues, si deseamos preservar la noción de que un producto tal como $5 \times n$, donde n es un entero cualquiera, es lo mismo que la suma de cinco sumandos cada uno de ellos igual a n, entonces tendríamos que considerar $5 \times {}^{-}2$ como igual a ${}^{-}2 + {}^{-}2 + {}^{-}2 + {}^{-}2 + {}^{-}2$. Una descripción gráfica por medio de flechas de esta situación es la que mostramos en la figura 25. Esta descripción es claramente paralela a la situación que resolvimos

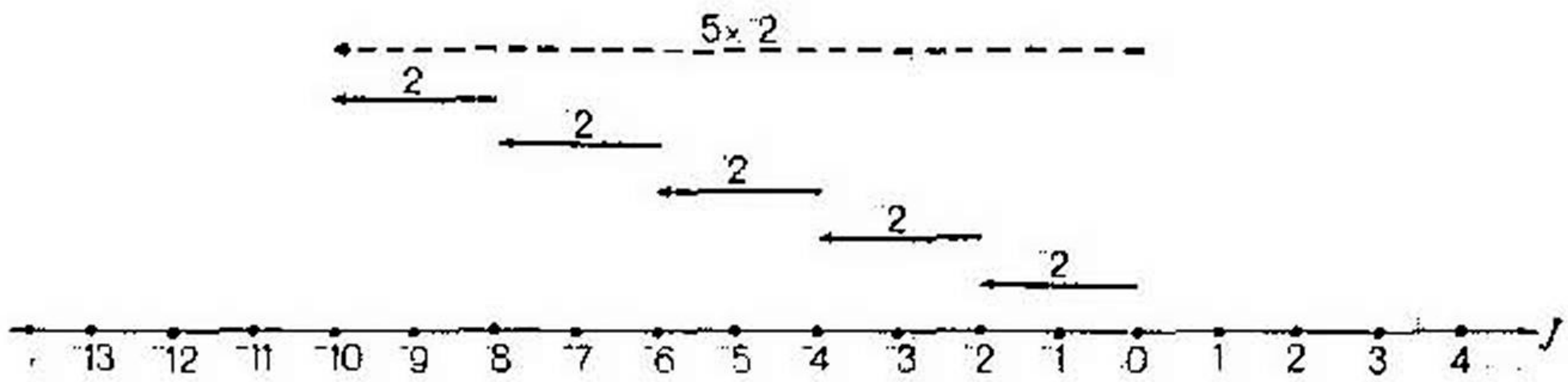


FIGURA 25

por simple sentido común que antes discutimos respecto al producto $5 \times {}^{-}20$ como igual a ${}^{-}100$ en los libros de una compañía.

En general, podemos definir el producto de un entero positivo cualquiera a y un entero negativo cualquiera b como la suma de a sumandos, todos ellos iguales a b (fig. 26).

Para $a = 1$, hay exactamente un "sumando", desde luego, y la "suma" es b; es decir $1 \times b = b$.

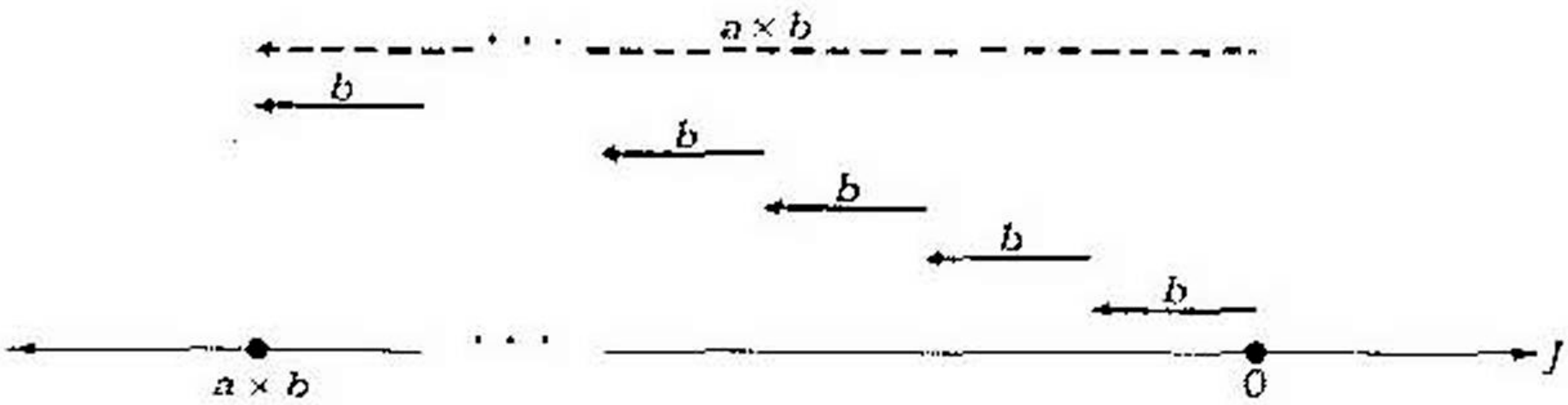


FIGURA 26

Podemos extender esta definición a todos los números plenos a si consideramos que para $a = 0$ no tenemos *ningún* sumando, de modo que el producto de 0 y b es 0; es decir, $0 \times b = 0$.

Producto de un entero negativo y un número pleno

Para el producto ba de un entero negativo b y un número pleno a, la situación intuitiva es quizá un poquito menos simple. Siguiendo con el convenio antes dado por el que ab se definía como la suma de a sumandos iguales a b, nos gustaría poder decir que ba es la suma de b sumandos iguales a a. ¿Pero qué puede entenderse por un número negativo, b, de sumandos iguales? Apliquemos las líneas generales que nos sirven de guía de que las operaciones en el sistema de los enteros deben ser consistentes, razonables y útiles.

CONSISTENTE

Hemos visto (pág. 45) que la multiplicación es conmutativa en el sistema de los números plenos. Si esta propiedad ha de conservarse en el sistema de los enteros, entonces no hay problema alguno en la determinación del valor del producto ba de un entero negativo b y un número pleno a. Si convenimos en tal cosa es claro que $ba = ab$, producto este último al que hemos asignado el valor de la suma de a sumandos todos iguales a b. Por ejemplo, para $b = {}^-2$ y $a = 5$, tenemos ${}^-2 \times 5 = 5 \times {}^-2 = {}^-10$.

Que la propiedad conmutativa se conserve no es, sin embargo, de importancia arrolladora, y no emplearíamos la anterior consideración para definir el producto de un entero negativo y un número pleno si el valor obtenido no fuese, además, razonable y útil. (Es posible, por ejemplo, que el lector sepa que la multiplicación se define en el sistema de las matrices de un modo que es razonable y útil, y tal definición se mantiene *a pesar del hecho* de que con ella la multiplicación no es, en general, conmutativa.)

RAZONABLE

Los enteros negativos no son números que sirvan para contar. No obstante ello, se les puede usar para "contar hacia atrás" desde 4 a ${}^-4$.

$$4, 3, 2, 1, 0, {}^-1, {}^-2, {}^-3, {}^-4.$$

Podemos también contar hacia atrás de cinco en cinco:

$$20, 15, 10, 5, 0, {}^-5, {}^-10, {}^-15, {}^-20.$$

Estos procesos pueden representarse sobre la recta numérica; el segundo se ilustra en la figura 27. Nótese que se tiene:

$$\begin{aligned}
20 &= 4 \times 5.\\
15 &= 3 \times 5.\\
10 &= 2 \times 5.\\
5 &= 1 \times 5.\\
0 &= 0 \times 5.\\
{}^{-}5 &= ? \times 5.\\
{}^{-}10 &= ? \times 5.\\
{}^{-}15 &= ? \times 5.\\
{}^{-}20 &= ? \times 5.
\end{aligned}$$

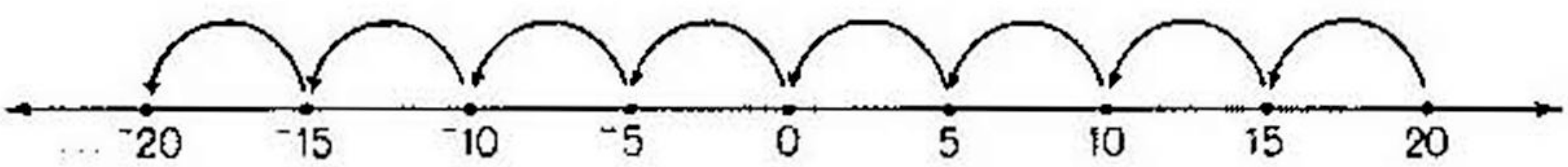


FIGURA 27

Nótese también que los términos a la izquierda van hacia atrás desde 20 hasta $^{-}20$ de cinco en cinco, y que los primeros factores de la derecha van hacia atrás de uno en uno desde 4. ¿Qué podría ser más razonable que continuar contando hacia atrás de uno en uno y escribir lo siguiente?

$$\begin{aligned}
{}^{-}5 &= {}^{-}1 \times 5.\\
{}^{-}10 &= {}^{-}2 \times 5.\\
{}^{-}15 &= {}^{-}3 \times 5.\\
{}^{-}20 &= {}^{-}4 \times 5.
\end{aligned}$$

La continuación razonable de la disposición de los números nos induce, pues, a definir el producto de un entero negativo y un número pleno en tal forma que, por ejemplo,

$${}^{-}2 \times 5 = {}^{-}10.$$

ÚTIL

Juan ha depositado \$5 en su cuenta de ahorros todas las semanas durante cuatro semanas. Tiene ahora \$38 en su cuenta. Si continúa depositando como hasta ahora, ¿cuánto tendrá en su cuenta dentro de tres semanas?, ¿y dentro de ocho semanas? ¿Cuánto tenía en su cuenta hace dos semanas?

Contando los depósitos y los tiempos futuros como positivos y los tiempos pasados como negativos, se contestaría a las primeras dos preguntas así:

$$\begin{aligned}
38 + (3 \times 5) &= 38 + 15 = 53;\\
38 + (8 \times 5) &= 38 + 40 = 78.
\end{aligned}$$

En tres semanas tendrá, por tanto, \$53 en su cuenta, y en ocho semanas tendrá un depósito de \$78. El lector sabe que la respuesta a la tercera pregunta debe ser \$28. De acuerdo con lo cual debería tenerse

$$38 \text{ más } ({}^{-}10) \text{ igual a } 28$$

Pero como se tiene

$$38 \text{ más } ({}^{-}10) \text{ igual a } 28,$$

de nuevo hemos de tener que ${}^{-}2$ veces 5 es igual a ${}^{-}10$.

La definición hacia la que nos dirigimos es, pues, útil en la solución de problemas prácticos. Esta definición, que se aplica tanto al producto de un número pleno y un entero negativo como al de un entero negativo y un número pleno, es la siguiente:

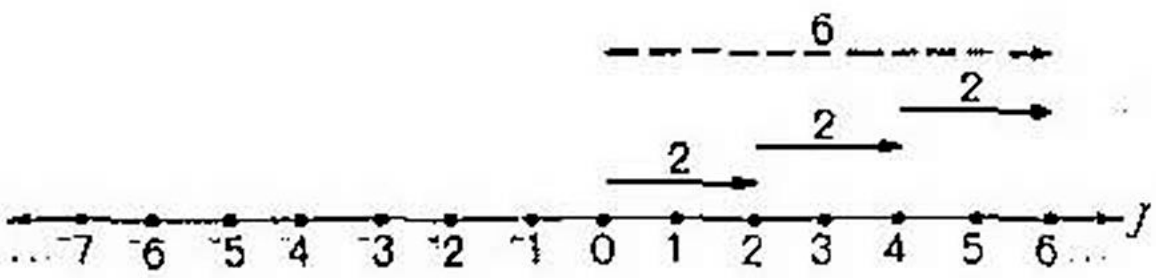
el producto $a \times b$ de dos enteros a y b, uno de los cuales es negativo y el otro un número pleno, está dado por

$$a \times b = {}^{-}(|a| \times |b|).$$

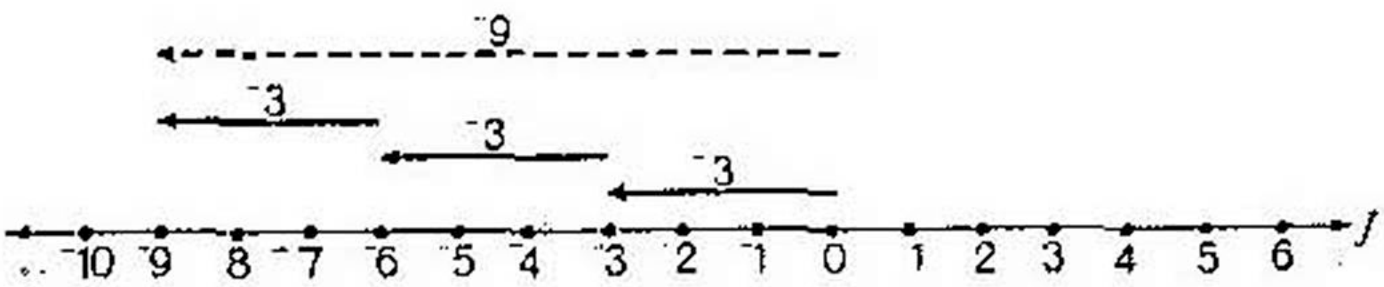
GRUPO DE EJERCICIOS 11

1. Escríbanse la adición y la multiplicación que vienen representadas por cada uno de los siguientes diagramas de flechas.

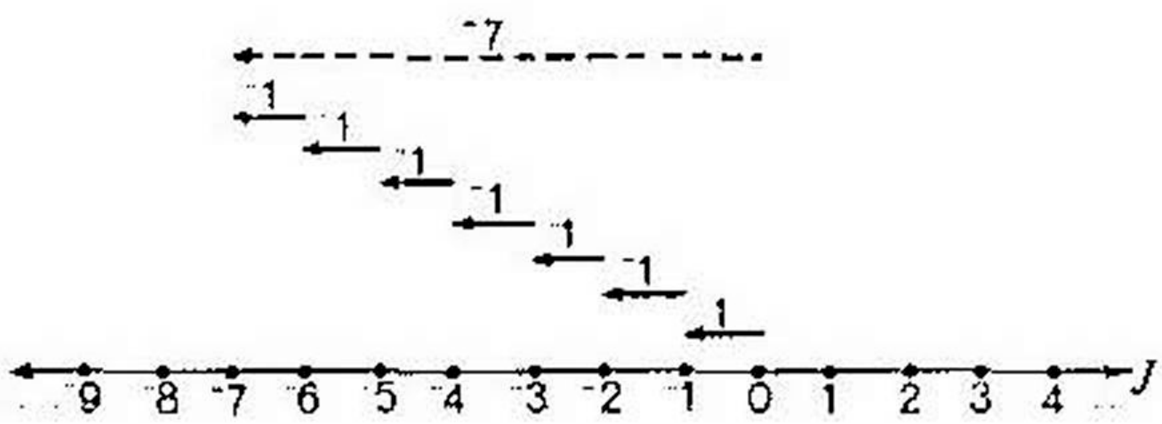
a)



b)



c)



2. Utilícese un diagrama de flechas sobre una recta numérica para representar a cada uno de los siguientes productos como una suma.

a) $5 \times {}^{-}7$ **c**) $2 \times {}^{-}6$
b) $4 \times {}^{-}3$ **d**) $6 \times {}^{-}1$

3. Complétense las siguientes igualdades:

a) $5 \times {}^{-}3 = \square \times 5.$ **c**) $4 \times {}^{-}6 = \square \times 4.$
b) ${}^{-}7 \times 2 = \square \times {}^{-}7.$ **d**) ${}^{-}8 \times 9 = \square \times {}^{-}8.$

4. Llénese el siguiente cuadro:

Factor	Factor	Producto
9	2	
9	1	
9	0	
9	$^{-}1$	
9	$^{-}2$	
2	9	
1	9	
0	9	
$^{-}1$	9	
$^{-}2$	9	

5. Simplifíquense los siguientes productos.

a) ${}^{-}25 \times 7$ **d**) $1 \times {}^{-}74$
b) $6 \times {}^{-}49$ **e**) ${}^{-}58 \times 62$
c) ${}^{-}38 \times 1$ **f**) $70 \times {}^{-}4$

Producto de dos enteros negativos

Para decidir qué es lo que debemos entender como producto de dos enteros negativos, acudamos una vez más a nuestro criterio de consistencia, razonabilidad y utilidad.

CONSISTENTE

Hemos visto que la ley distributiva es válida para los números plenos (pág. 45). Cuando esta ley se aplica dos veces, se obtiene

$$\begin{aligned}(a + b) \times (c + d) &= [a \times (c + d)] + [b \times (c + d)] \\ &= (a \times c) + (a \times d) + (b \times c) + (b \times d).\end{aligned}$$

Si también ha de cumplirse esta ley para el sistema de los enteros, entonces por ejemplo, debemos tener,

$$\begin{aligned}(8 + {}^{-}5) \times (6 + {}^{-}2) &= (8 \times 6) + (8 \times {}^{-}2) + ({}^{-}5 \times 6) + ({}^{-}5 \times {}^{-}2) \\ &= 48 + {}^{-}16 + {}^{-}30 + ({}^{-}5 \times {}^{-}2) \\ &= 2 + ({}^{-}5 \times {}^{-}2).\end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}(8 + {}^{-}5) \times (6 + {}^{-}2) &= 3 \times 4 \\ &= 12.\end{aligned}$$

Luego, si la propiedad distributiva ha de verificarse en el sistema de los enteros, entonces debemos tener

$$\begin{aligned}2 + ({}^{-}5 \times {}^{-}2) &= 12, \\ {}^{-}5 \times {}^{-}2 &= 10.\end{aligned}$$

RAZONABLE

Hemos convenido en definir la multiplicación de tal modo que, por ejemplo,

$${}^{\circ}5 \times 2 = {}^{\circ}(5 \times 2).$$

Parecería pues razonable extender la definición de multiplicación de tal manera que

$$(*) \qquad {}^{\circ}5 \times {}^{\circ}2 = {}^{\circ}(5 \times {}^{\circ}2).$$

Pero ya hemos convenido en definir la multiplicación de modo que

$$(**) \qquad 5 \times {}^{\circ}2 = {}^{\circ}(5 \times 2).$$

La sustitución de (**) en (*) nos dice que lo que queríamos tener es

$$\begin{aligned}{}^{\circ}5 \times {}^{\circ}2 &= {}^{\circ}(5 \times {}^{\circ}2) \\ &= {}^{\circ}[{}^{\circ}(5 \times 2)].\end{aligned}$$

Pero

$${}^{\circ}[{}^{\circ}(5 \times 2)] = 5 \times 2,$$

de manera que deberíamos tener

$${}^{\circ}5 \times {}^{\circ}2 = 5 \times 2,$$

o bien

$$^{-}5 \times {}^{-}2 = 10.$$

Los patrones de comportamiento de los números sugieren también lo razonable de la misma convención:

$$\begin{aligned} 4 \times {}^{-}5 &= {}^{-}20, \\ 3 \times {}^{-}5 &= {}^{-}15, \\ 2 \times {}^{-}5 &= {}^{-}10, \\ 1 \times {}^{-}5 &= {}^{-}5, \\ 0 \times {}^{-}5 &= 0. \end{aligned}$$

A la izquierda estamos contando hacia abajo de uno en uno; a la derecha, hacia arriba de cinco en cinco. Continuando con igual pauta:

$$\begin{aligned} ^{-}1 \times {}^{-}5 &= 5, \\ ^{-}2 \times {}^{-}5 &= 10, \\ ^{-}3 \times {}^{-}5 &= 15, \\ ^{-}4 \times {}^{-}5 &= 20. \end{aligned}$$

Y así sucesivamente.

ÚTIL.

Tomás ha retirado \$5 de su cuenta de ahorros todas las semanas durante cuatro semanas. Ahora tiene \$38 en su cuenta. Si sigue retirando fondos de esa manera, ¿cuánto tendrá en su cuenta pasadas tres semanas?, ¿y después de ocho semanas? ¿Cuánto tenía en la cuenta dos semanas antes?

Si contamos los depósitos y los retiros futuros como positivos y los retiros y los depósitos pasados como negativos, contestaremo así a las dos primeras preguntas:

$$\begin{aligned} 38 + (3 \times {}^{-}5) &= 38 + {}^{-}15 = 23; \\ 38 + (8 \times {}^{-}5) &= 38 + {}^{-}40 = {}^{-}2. \end{aligned}$$

Por tanto, pasadas tres semanas tendrá \$23 en su cuenta, y después de ocho semanas tendrá $^{-}$\$2 (una cantidad negativa, de modo que su cuenta está sobregirada). El lector sabe que la contestación a la tercera pregunta debe ser \$48. De acuerdo con lo cual debemos tener

$$38 \text{ más } ({}^{-}2 \times {}^{-}5) \text{ igual a } 48.$$

Pero como

$$38 \text{ más } 10 \text{ es igual a } 48,$$

de nuevo debemos tener que $^{-}2$ veces $^{-}5$ debe ser igual a 10.

Por tanto, parece consistente, razonable y útil, que convengamos en la siguiente definición:

el producto $a \times b$ de dos enteros negativos a y b está dado por

$$a \times b = |a| \times |b|.$$

GRUPO DE EJERCICIOS 12

1. Simplifíquese cada uno de los productos siguiendo el modelo que a continuación se da.

$$\begin{aligned}
{}^-5 \times {}^-6 &= ({}^-1 \times 5) \times ({}^-1 \times 6),\\
{}^-5 \times {}^-6 &= ({}^-1 \times {}^-1) \times (5 \times 6),\\
{}^-5 \times {}^-6 &= 1 \times (5 \times 6),\\
{}^-5 \times {}^-6 &= 1 \times 30,\\
{}^-5 \times {}^-6 &= 30.
\end{aligned}$$

a) ${}^-2 \times {}^-4$ **c**) ${}^-78 \times {}^-31$
b) ${}^-5 \times {}^-9$ **d**) ${}^-650 \times {}^-478$

2. Complétese el cuadro.

Factor	Factor	Producto
2	$^-7$	
1	$^-7$	
0	$^-7$	
$^-1$	$^-7$	
$^-2$	$^-7$	

3. En cada una de las expresiones siguientes, reemplácese n por un entero que haga la proposición verdadera.

a) ${}^-54 \times {}^-96 = n.$ **c**) $78 \times {}^-65 = n.$ **e**) ${}^-59 \times 38 = n.$
b) ${}^-17 \times {}^-23 = n.$ **d**) $0 \times {}^-32 = n.$ **f**) ${}^-714 \times {}^-293 = n.$

Propiedades de la multiplicación en el conjunto de los enteros

En la página 45 enumeramos las propiedades de cierre, conmutatividad y asociatividad de la multiplicación en el conjunto W de los números plenos, hicimos notar que uno es el elemento identidad multiplicativo en este conjunto y señalamos que la multiplicación se distribuye respecto a la adición y a la sustracción en este conjunto.

Definimos luego la multiplicación en el conjunto de los enteros de un modo que parecía razonable y útil. Dimos también algunas indicaciones de que si las propiedades que antes enumeramos habían de conservarse en el conjunto de los enteros, entonces los productos *deben* definirse precisamente en tal modo en el conjunto extendido.

En realidad, podríamos haber *postulado* que las propiedades de adición y multiplicación enumeradas en las páginas 31 y 45 para los números plenos se verificaban también para el conjunto extendido para incluir los inversos aditivos, y *basándonos en esto* haber *probado* que la adición y la multiplicación deben, entonces, efectuarse en la forma que hemos descrito, y haber *mostrado* que todas las propiedades son ciertamente válidas con las definiciones de adición y multiplicación así definidas. Esta especie de concesión a la estética de las matemáticas puras es agradable y ordenada, desde luego, pero sin aplicaciones razonables el desarrollo sería en verdad monótono y estéril.

No completaremos aquí la verificación de las propiedades de la multiplicación en el conjunto de los enteros. Nos contentaremos con enumerarlas:

1. *Propiedad de cierre*: el producto de dos enteros cualesquiera es un entero bien determinado.
2. *Propiedad conmutativa*: si a y b son enteros cualesquiera, entonces
$$a \times b = b \times a.$$
3. *Propiedad asociativa*: si a, b y c son enteros cualesquiera, entonces
$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c).$$
4. *Elemento identidad*: uno es el elemento identidad para la multiplicación; para cualquier entero n, $n \times 1 = 1 \times n = n$.
5. *Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición*: si a, b y c son enteros cualesquiera, entonces $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$.
6. *Propiedad multiplicativa del cero*: si a y b son enteros cualesquiera, entonces $ab = 0$ si y sólo si al menos uno de los dos factores, a o b, es 0.

Nótese que no hemos incluido una propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la sustracción, ya que, como se verá en la próxima sección, en el conjunto de los enteros la diferencia $b - c$ puede considerarse igual a la suma $b + {}^{-}c$.

GRUPO DE EJERCICIOS 13

1. Complétese el cuadro de hechos básicos de la multiplicación en el conjunto de enteros que a continuación aparece

Segundo factor

												12												
												11												
												10												
												9												
												8												
												7												
												6												
												5												
												4												
								-12				3				12								
												2												
												1												
-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
												-1												
												-2												
								12				-3				-12								
												-4												
												-5												
												-6												
												-7												
												-8												
												-9												
												-10												
												-11												
												-12												

Primer factor

2. Úsese el cuadro completado en el ejercicio 1 como ayuda en la contestación a las siguientes cuestiones.

a) ¿Puede expresarse siempre el producto de dos enteros como un entero?

b) $9 \times 9 \square$.

c) $^{-}9 \times 9 \square$.

d) $^{-}9 \times {}^{-}9 \square$.

e) $9 \times {}^{-}9 \square$.

f) $5 \times {}^{-}4 = \square \times 5$.

g) $^{-}7 \times 12 = 12 \times \square$.

h) $^{-}1 \times 7 = \square$.

i) $8 \times {}^{-}1 = \square$.

j) $9 \times 1 = \square$.

k) $1 \times 6 = \square$.

3. Complétense las siguientes igualdades usando el cuadro del ejercicio 1.

a) $^{-}2 \times 3 = \square$.

b) $^{-}6 \times 4 = \square$.

c) $(^{-}2 \times 3) \times 4 = \square$.

d) $3 \times 4 = \square$.

e) $^{-}2 \times 12 = \square$.

f) $(^{-}2 \times 3) \times 4 = {}^{-}2 \times (\square \times \triangle)$.

4. En cada una de las proposiciones que siguen identifíquese la propiedad de la multiplicación en el conjunto de los enteros que debe usarse para justificarla.

Proposición	Propiedad
a) $^{-}4 \times {}^{-}5 = {}^{-}5 \times {}^{-}4$.	________
b) $7 \times (^{-}6 \times 8) = (7 \times {}^{-}6) \times 8$.	________
c) El producto de dos enteros cualesquiera es siempre un entero.	________
d) El producto de cualquier entero y 0 es siempre 0.	________
e) El producto de cualquier entero y 1, es siempre el entero.	________

5. Un restorán ha contratado a una camarera sin experiencia que es poco hábil en el manejo de los vasos. En realidad, los ha estado rompiendo a una velocidad de cinco vasos al día.

a) Si ha estado trabajando durante tres días, ¿qué relación hay entre el número de vasos antes de su llegada y los que hay al presente? Escríbase una expresión producto para esta situación. *Sugerencia:* Represéntese el tiempo pasado usando enteros negativos y el futuro usando enteros positivos, y denótese el número de vasos rotos empleando enteros negativos y el de vasos no rotos con enteros positivos.

b) Si continúa del mismo modo, ¿cuál será la existencia de vasos después de dos días en relación con la existencia actual? Escríbase una expresión producto para esta situación.

6. Guillermito se ha preparado para una excursión con su cantimplora llena, pero está estropeada y pierde agua a razón de un vaso por kilómetro.

a) ¿Qué relación hay entre la cantidad de agua que tendrá cuando haya caminado dos kilómetros más y la que tiene ahora? Escríbase una expresión producto para describir esta situación.

b) ¿Qué relación hay entre la cantidad que tenía dos kilómetros antes con la que tiene ahora? Escríbase una expresión producto para describir esta situación.

SUSTRACCION Y DIVISION DE ENTEROS

Sustracción

El concepto familiar de la sustracción como un proceso en que se "quita", carece de sentido si se desea discutir el resultado de, digamos, restar 3 de 1. No se puede "quitar" una cantidad mayor de la que hay. Debe observarse, sin embargo, que algunas personas no permiten que esta sutileza filosófica les perturbe cuando "quitan", digamos, \$50 de una cuenta corriente que sólo contiene \$40. En realidad, como se tiene a mano el conjunto de los enteros, y como hay un punto de vista (bajo muchos aspectos preferible) alternativo que podemos tomar respecto a la sustracción, el problema lógico envuelto en el sobregiro de una cuenta corriente pude resolverse a entera satisfacción de la mayoría de las personas que no están en los negocios bancarios.

En lugar de ver la diferencia $1 - 3$ como el problema de "quitar" 3 de 1, es preferible considerar la expresión $1 - 3$ como un nombre del número n que debemos sumar a 3 para obtener 1 como resultado de nuestra suma, es decir, como un nombre del número n tal que $3 + n = 1$. Mientras que en el conjunto de los números plenos no existía ningún número tal, el entero $^{-}2$ se comporta en la forma deseada; es decir, se tiene que $3 + {}^{-}2 = 1$. Cuando consideramos la sustracción de este modo, una *diferencia* es simplemente un *sumando faltante* en una suma. El lector puede recordar que ésta fue la forma en que definimos las diferencias de números plenos en el cuaderno 2: *Números enteros*. Lo que ahora hacemos es simplemente extender esta definición al conjunto J de los enteros.

si a, b y n son enteros, entonces $a - b = n$ si y sólo si $b + n = a$.

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} 8 - 3 &= 5, &&\text{porque} & 3 + 5 &= 8; \\ 7 - 12 &= {}^-5, &&\text{porque} & 12 + ({}^-5) &= 7; \\ 7 - {}^-6 &= 13, &&\text{porque} & {}^-6 + 13 &= 7; \\ {}^-8 - {}^-6 &= 1, &&\text{porque} & {}^-9 + 1 &= {}^-8. \end{aligned}$$

y

$$ {}^-8 - {}^-9 = 1, \quad \text{porque} \quad {}^-9 + 1 = {}^-8.$$

Al simplificar mentalmente una diferencia como, por ejemplo, $8 - {}^-2$, nos podemos preguntar: ¿qué número debo sumar a $^-2$ para obtener 8? La respuesta, desde luego, es 10.

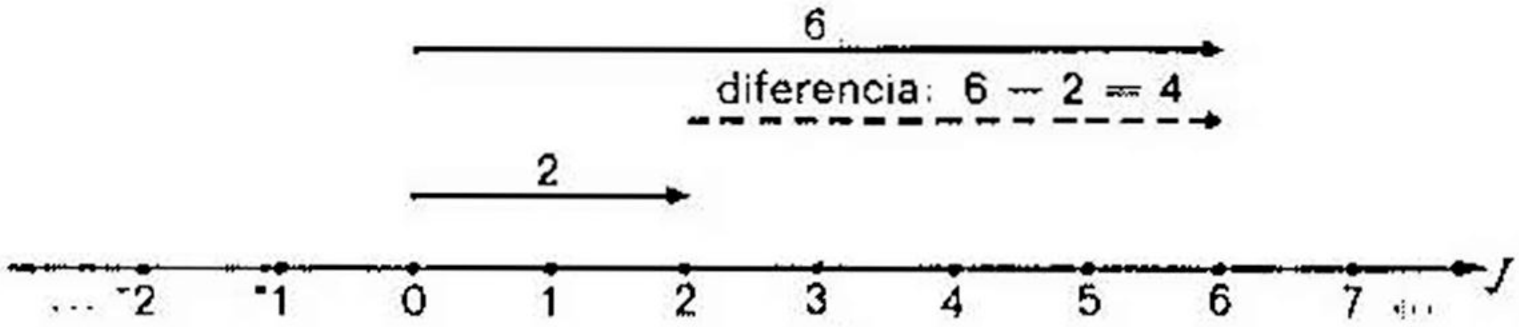


FIGURA 28

Tan estrechamente ligada a la adición está la operación de sustracción que, con la existencia de un inverso aditivo u opuesto para todo elemento de un conjunto, una diferencia puede verse como equivalente a una suma. Consideremos, por ejemplo, la diferencia $6 - 2$. En la figura 28 se muestra una representación con flechas de esta diferencia en que la flecha de trazos interrumpidos representa la diferencia $6 - 2$ o 4.

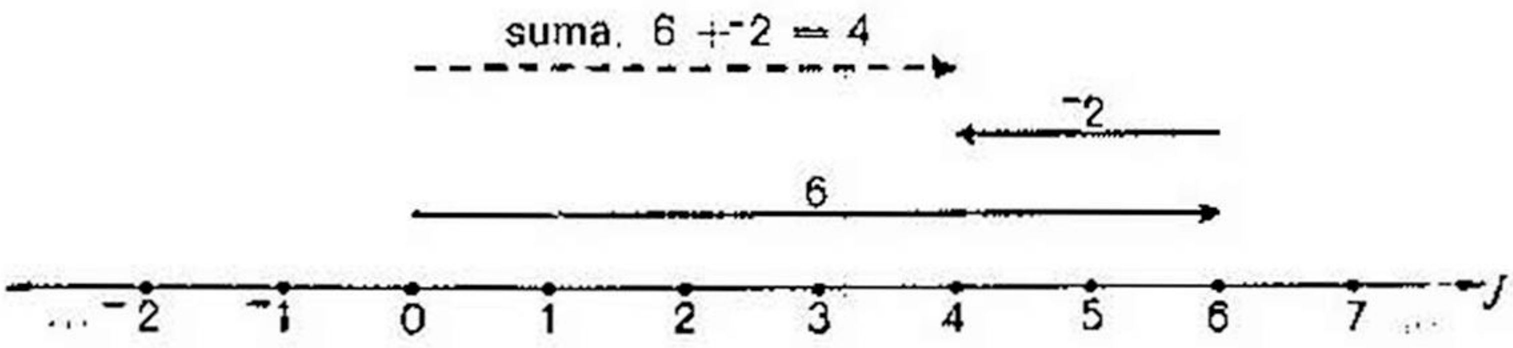


FIGURA 29

Si comparamos esta figura con la figura 29, en que se muestra la representación por medio de flechas de la suma $6 + {}^-2$, puede verse que los resultados son iguales. En realidad, la representación por medio de flechas sugiere que, en general, $a - b$ habría de ser igual a $a + {}^-b$, porque la sola diferencia en cualquier par de tales gráficas debe estar en la locación y dirección de las flechas para b y $^{\circ}b$. Dada una flecha cualquiera para un entero a, y una flecha con el mismo punto inicial para el entero b, la flecha para la diferencia $a - b$ irá desde la cabeza de la flecha para b a la cabeza de la flecha para a, como se muestra en la figura 30(a). Además, la flecha para la suma de a y $^{\circ}b$ debe ir desde la cola de la flecha para a a la cabeza de la flecha $^{\circ}b$, cuando la cola de la flecha para $^{\circ}b$ está

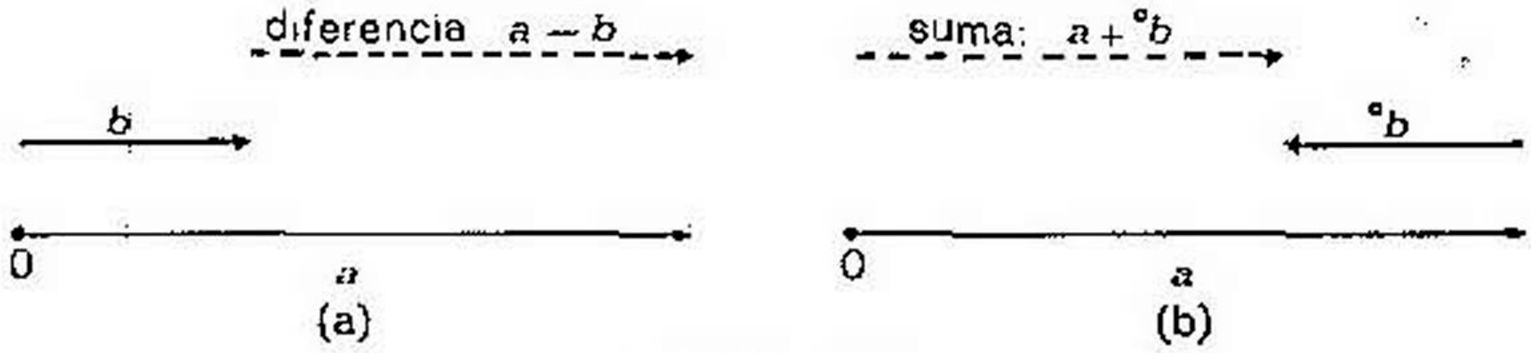


FIGURA 30

en la cabeza de la flecha para a, como se ve en la figura 30(b). Pero como la flecha para $^{\circ}b$ tiene la misma longitud que la flecha para b, pero es de dirección opuesta y como estas flechas están localizadas con puntos iniciales en extremos opuestos de la flecha para a, se sigue que las flechas para $a - b$ y para $a + {}^{\circ}b$ deben ser iguales respecto a longitud y dirección.

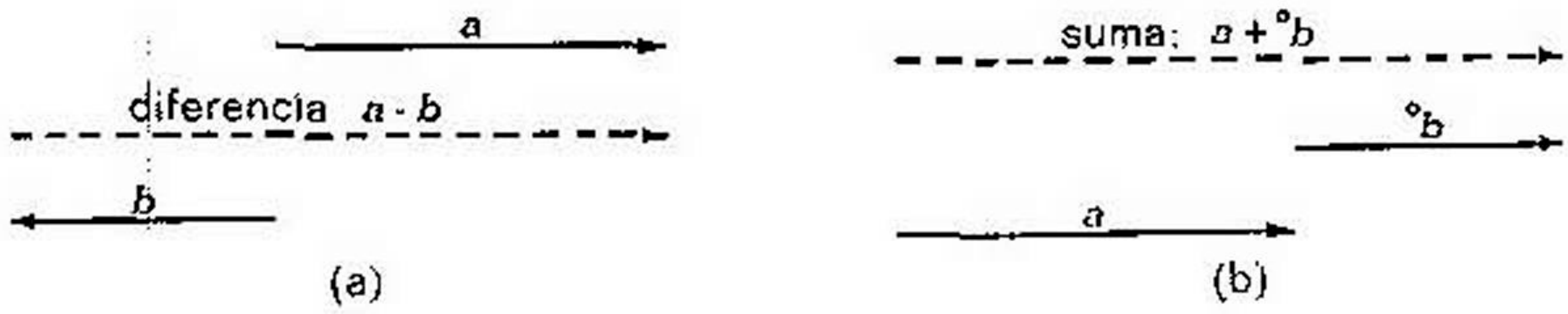


FIGURA 31

Las figuras 31(a) y 31(b) muestran otro caso en el que b representa un entero negativo.

Dibujos análogos para los casos en que a es negativa y b es positiva o a y b son, ambas, negativas, sugieren con fuerza la verdad de la siguiente proposición:

si a y b son enteros, entonces $a - b = a + {}^{\circ}b$.

Así pues,

$$3 - 5 = 3 + {}^-5 = {}^-2,$$
$$6 - {}^-4 = 6 + 4 = 10,$$
$${}^-3 - {}^-7 = {}^-3 + 7 = 4,$$

y

$${}^-8 + 6 = {}^-8 + {}^-6 = {}^-14.$$

Cuando la sustracción se interpreta en términos de la adición de un opuesto, la propiedad de cierre para la adición en J se puede ver que se aplica también a la sustracción. Es decir, tenemos la *propiedad de cierre para la sustracción de enteros:*

si a y b son enteros, entonces $a - b$ es un entero.

La adición y la sustracción se llaman *operaciones inversas* porque cada una de ellas puede considerarse que "deshace" a la otra. Por ejemplo, la *adición* de 3 a 5 nos da 8, y la *sustracción de* 3 de 8 nos da 5. La figura 32 nos da una representación esquemática de esta idea.

No es necesario dar para la sustracción proposiciones análogas a las de las páginas 35 y 38 respecto al valor absoluto de sumandos y sumas, porque la sustracción en el conjunto de los enteros es cuestión de sumar un opuesto y las proposiciones sobre adición cubren todos los casos.

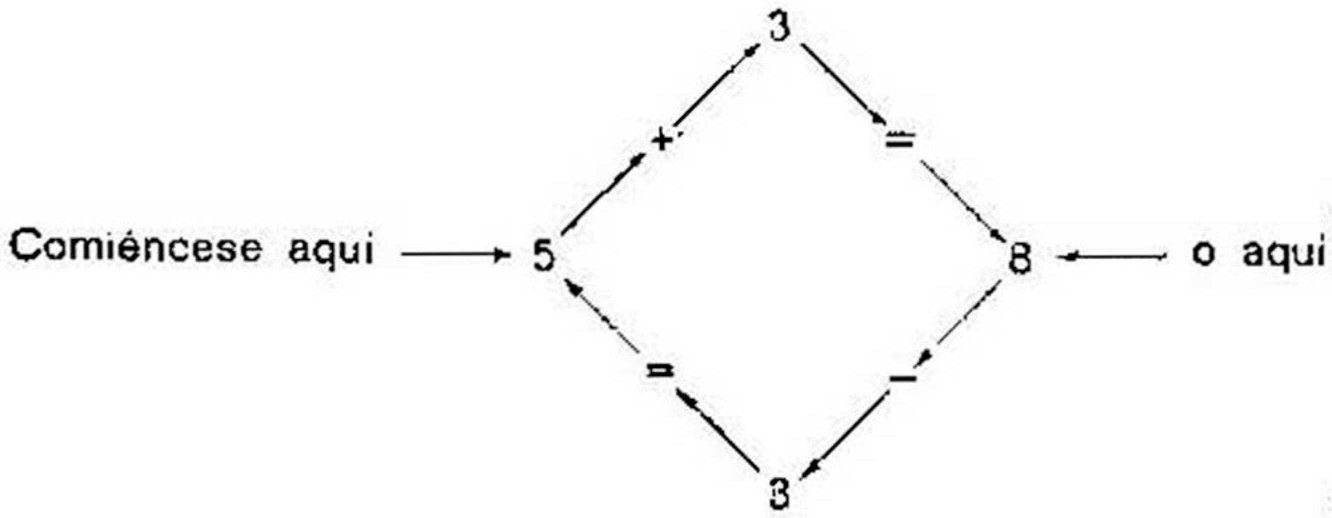


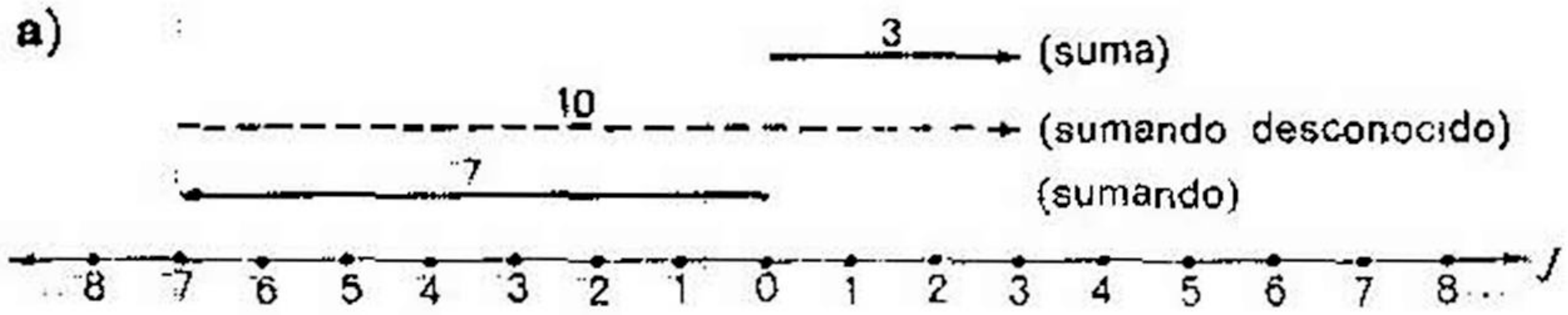
FIGURA 32

El lector recordará (pág. 27) que $a > b$ si y sólo si la gráfica de a se encuentra a la derecha de la gráfica de b. Hemos visto ahora que si las flechas para a y b tienen el mismo punto inicial (fig. 30), digamos, si estas flechas están en la posición estándar, entonces una flecha para $a - b$ va desde la cabeza de la flecha para b a la cabeza de la flecha para a. Se sigue de ello que *$a > b$ si y sólo si $a - b$ es positivo,* es decir, si y sólo si *$a = b + n$, donde n es positivo.*

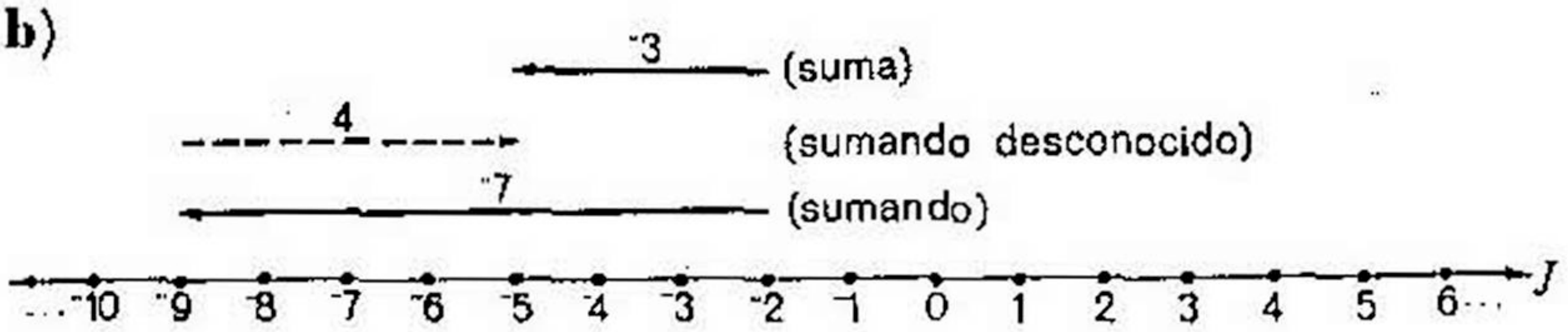
GRUPO DE EJERCICIOS 14

1. Para cada uno de los siguientes diagramas de flechas, escríbase la sustracción con él relacionada.

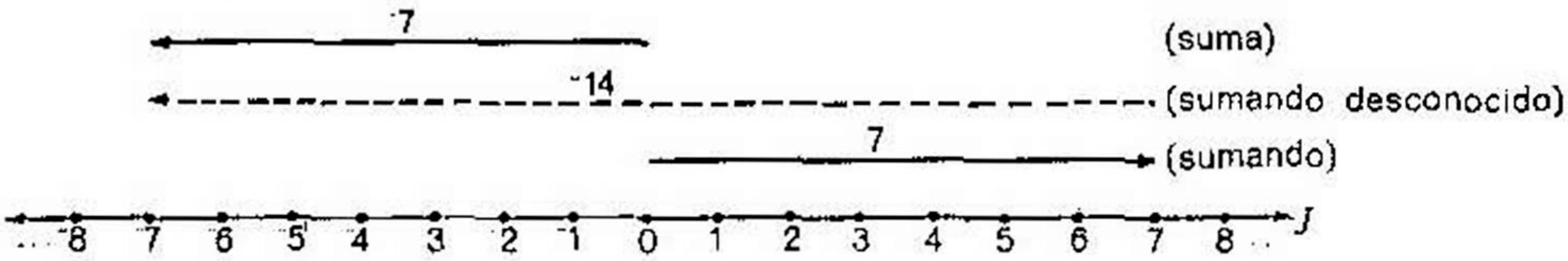
a)



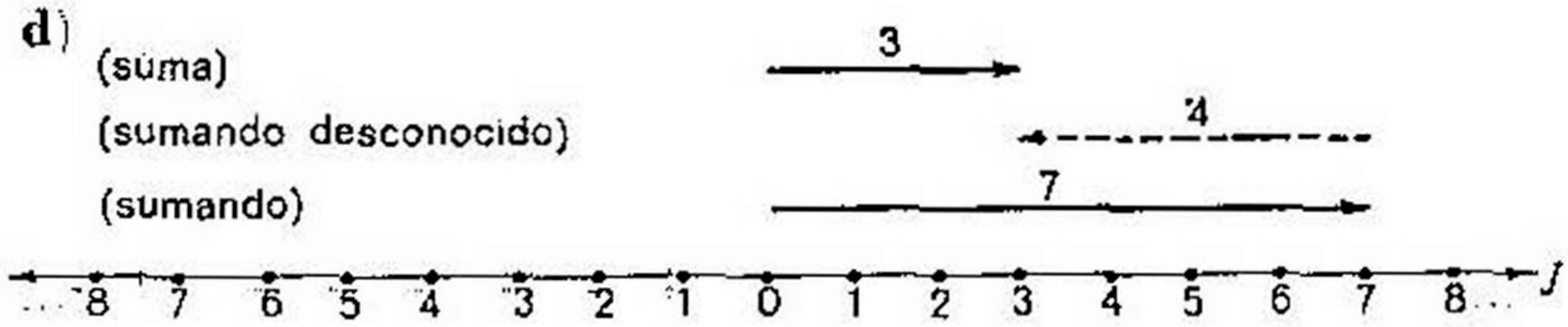
b)



c)



d)



2. Complétense:

a) $17 - {}^{-}14 = 17 + \square$.
b) ${}^{-}23 - {}^{-}6 = {}^{-}23 + \square$.
c) ${}^{-}95 - 38 = {}^{-}95 + \square$.
d) $89 - 108 = 89 + \square$.

3. La columna A representa temperaturas a las 4:00 horas. La columna B representa temperaturas a las 18:00 horas. Úsese un entero para indicar la cuantía y dirección del cambio.

	A	B	Cambio total
Lunes	-5°	13°	______
Martes	6°	-4°	______
Miércoles	-2°	0°	______
Jueves	4°	-7°	______
Viernes	-8°	10°	______

División

De igual modo que la sustracción se define en términos de adición, también la división se define en términos de multiplicación. Por ejemplo, decimos que $8 \div 2 = n$, si y sólo si $2 \times n = 8$. Un cociente puede, pues, verse como un factor faltante del mismo modo que pensábamos en la diferencia como en un sumando no conocido. Desde luego, si $8 \div 2 = n$, entonces n debe representar a 4, porque $2 \times 4 = 8$. En general decimos esto:

> *si a y b son enteros, y $b \neq 0$, entonces $a \div b = n$ si y sólo si $b \times n = a$.*

Otros ejemplos de aplicación de la definición de enteros positivos son

$$\begin{aligned} 12 \div 6 &= 2 \quad \text{porque} \quad 2 \times 6 = 12, \\ 25 \div 5 &= 5 \quad \text{porque} \quad 5 \times 5 = 25, \\ 8 \div 1 &= 8 \quad \text{porque} \quad 1 \times 8 = 8. \end{aligned}$$

Es de inmediato evidente que en el conjunto de los enteros no todos los pares de enteros tienen cociente, exactamente lo mismo que no todos los pares de números plenos tienen cociente, incluso cuando el divisor es distinto de cero. Por ejemplo, la expresión $8 \div 3$ no representa un entero porque no hay ningún entero n tal que $3 \times n = 8$. Luego el conjunto de los enteros no es cerrado con respecto a la división. Este hecho nos lleva a desarrollar un nuevo sistema de números llamado el sistema de números racionales. (Véase el cuaderno 10: *Sistema de los números racionales.*)

Si no fuera por la necesidad de discutir opuestos en el conjunto de los enteros, nada habría que decir respecto a la división en este conjunto aparte de que es completamente análoga a la división en el conjunto de los números plenos. Lo cierto es que de todas maneras muy poco es lo que hay que decir. El principal problema en la simplificación de cocientes de enteros estriba en la determinación de si un cociente dado es un número positivo o un número negativo, pero de este problema podemos hacer caso omiso simplemente refiriéndonos a lo que ya sabemos sobre productos de enteros.

Consideremos el cociente $^-12 \div 3$. De acuerdo con nuestra definición de cociente,

$$^-12 \div 3 = n \text{ si y sólo si } 3 \times n = {}^-12.$$

Sabiendo que el producto de dos enteros es negativo solamente bajo la condición de que uno de los factores, pero no los dos, es negativo, y sabiendo que 3 es no negativo, concluimos que n debe representar un número negativo si $3 \times n$ es igual a $^-12$. Sabemos, además, cuál es el número negativo que representa n porque solamente hay un entero para el que $3 \times n = {}^-12$, el $^-4$.

De modo análogo podemos determinar que

$$\begin{array}{rll} {}^-12 \div {}^-3 = 4 & \text{porque} & {}^-3 \times 4 = {}^-12, \\ {}^-8 \div {}^-2 = 4 & \text{porque} & {}^-2 \times 4 = {}^-8, \\ {}^-27 \div 9 = {}^-3 & \text{porque} & 9 \times {}^-3 = {}^-27. \end{array}$$

Una proposición general comparable a la de las páginas 50 y 53 respecto a los productos de enteros (y consecuencia de ella) puede enunciarse como sigue:

El cociente de dos enteros es:

1. Positivo si ambos enteros son positivos o si ambos enteros son negativos.
2. Negativo si uno de los enteros es positivo y uno es negativo.

Al discutir la sustracción no establecimos formalmente reglas que incluyeran valores absolutos de enteros para emplear en la simplificación de diferencias. La situación en la división es un poco diferente. Una vez que podemos enunciar que la diferencia $a - b$ es igual a la suma $a + {}^\circ b$, las propiedades de valor absoluto de la adición son aplicables directamente a la sustracción. La razón de que la proposición

$$a - b = a + {}^\circ b$$

sea cierta, es que todo entero b tiene un inverso aditivo ${}^\circ b$. Una situación comparable a ésta no existe para la multiplicación y la división, porque la división no siempre es posible en J. No es posible, sin embargo, volver a formular las reglas para el valor absoluto de las páginas 50 y 53 en términos de división, y eso es lo que vamos a hacer.

Para comenzar, sabemos que para cualesquiera enteros a y b, con $b \neq 0$,

$$a \div b = n \quad \text{si y sólo si} \quad b \times n = a.$$

Ahora bien, de acuerdo a la propiedad enunciada en las páginas 50 y 53 podemos afirmar que si b y n son enteros, entonces

$$|b| \times |n| = |b \times n|,$$

o, de acuerdo con el supuesto de que $b \times n = a$, podemos decir

$$|b| \times |n| = |a|.$$

Pero, de acuerdo con la definición de división ($|n|$ es un factor que falta), esto implica lo siguiente:

si a, b y n son enteros, con $b \neq 0$, *y* $a \div b = n$, *entonces* $|n| = |a| \div |b|$.

Este hecho, junto con la proposición de la página 63 respecto a cocientes positivos y cocientes negativos, nos proporciona todo lo que necesitamos para determinar exactamente qué entero, si es que hay alguno, es el que corresponde a un cociente dado de enteros:

> *supongamos que a, b y n son enteros con* $b \neq 0$, *y que* $a \div b = n$. *Si a y b son ambos positivos, o ambos negativos, entonces* $n = |a| \div |b|$; *pero si uno es positivo y el otro negativo, entonces* $n = {}^{-}(|a| \div |b|)$. *Si* $a = 0$, *entonces* $n = 0$.

Por ejemplo, para identificar el entero que corresponde a $^{-}153 \div 9$, primero dividimos $|^{-}153|$, es decir, 153, por $|9|$, o sea 9, para obtener el entero positivo 17, de donde, como $^{-}153$ es negativo y 9 es positivo, el cociente buscado es el número *negativo* $^{-}17$.

Exactamente lo mismo que son operaciones inversas la adición y la sustracción, también lo son la multiplicación y la división. Por ejemplo, si 4 está multiplicado por 5, el resultado es 20; y si dividimos 20 entre 5, el resultado es 4. La figura 33 describe esquemáticamente estas operaciones.

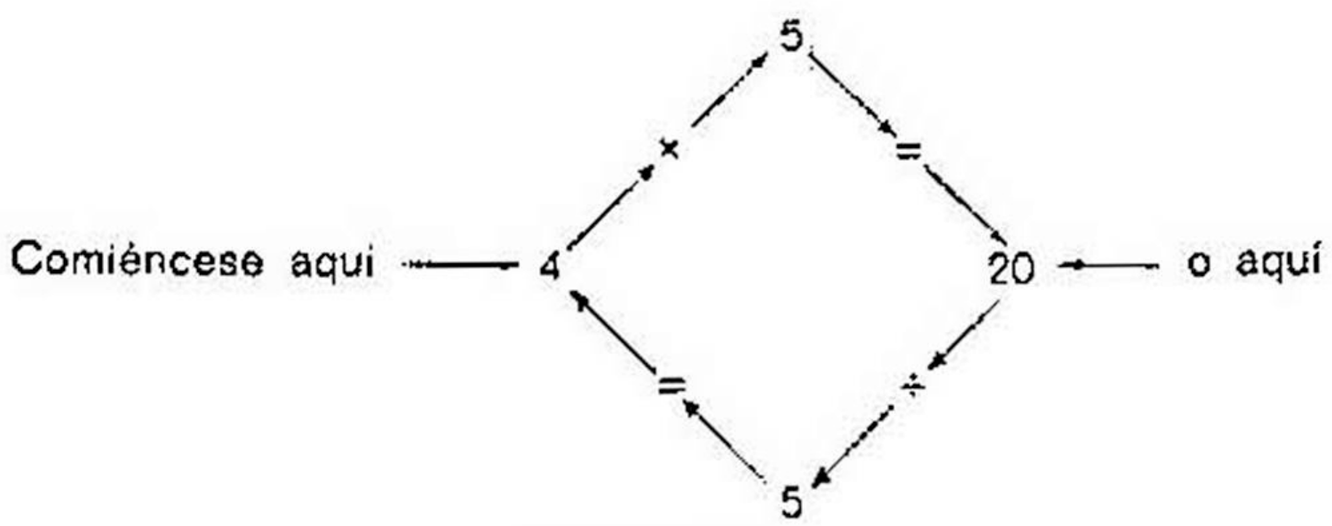


FIGURA 33

Exactamente lo mismo que en el conjunto de los números plenos, los cocientes en que aparece 0 merecen una consideración especial en el conjunto de los enteros. Los cocientes de la forma $0 \div a$ no presentan dificultad alguna, siempre que a sea un entero cualquiera distinto de 0. Para cualquier entero a distinto de cero, tenemos, en efecto,

$$0 \div a = 0 \quad \text{porque} \quad a \times 0 = 0.$$

Por ejemplo, $0 \div 3 = 0$ porque $3 \times 0 = 0$, y $0 \div {}^{-}7 = 0$ porque $^{-}7 \times 0 = 0$. Pero, en cambio, 0 como divisor no está permitido. Para identificar un cociente cuando $^{-}7$ está dividido entre 0, nos encontramos con el problema de identificar un número cuyo producto con 0 sea $^{-}7$. Es decir,

$$^-7 \div 0 = n \quad \text{si y sólo si} \quad 0 \times n = {}^-7.$$

Pero para cualquier entero n, sin embargo, $0 \times n = 0$; luego no hay entero alguno n para el que $0 \times n = {}^-7$. Quiere esto decir que $^-7 \div 0$ no determina un entero. Al tratar de identificar el cociente $0 \div 0$, nos encontramos con la incómoda situación de que n puede ser *cualquiera* de los enteros, porque $0 \times n = 0$ para todo entero n. De acuerdo con esto, excluimos en J, exactamente como hicimos en W, la división entre 0 del conjunto de operaciones legítimas en J, y afirmamos:

en J, la división entre 0 *no está definida.*

GRUPO DE EJERCICIOS 15

1. Escríbanse de nuevo las siguientes expresiones de división como expresiones multiplicativas:

a) $^-24 \div 6 = n$	**e)** $^-312 \div 1 = n$
b) $36 \div {}^-6 = n$	**f)** $^-96 \div 8 = n$
c) $^-42 \div {}^-7 = n$	**g)** $144 \div {}^-12 = n$
d) $512 \div 8 = n$	**h)** $^-840 \div {}^-24 = n$.

2. Háganse los cálculos para encontrar el entero representado por n en cada una de las siguientes expresiones:

a) $^-18 \div 3 = n$	**d)** $^-682 \div {}^-31 = n$
b) $768 \div 16 = n$	**e)** $^-864 \div 12 = n$
c) $^-760 \div {}^-19 = n$	**f)** $224 \div {}^-16 = n$.

ALGUNAS OBSERVACIONES SOBRE NOTACION

Un símbolo o tres símbolos para tres significados

Durante toda nuestra discusión del conjunto de los enteros, hemos usado consistentemente dos símbolos para conceptos asociados con los enteros que no están asociados con los números plenos. Estos símbolos son el símbolo menos, levantado, "$^-$", usado antes de los numerales para indicar los números negativos, y el símbolo "^{o}" para indicar "el opuesto de". Para la sustracción, hemos usado el símbolo común de sustracción, "$-$".

Los símbolos "$^-$" y "^{o}", sin embargo, no son símbolos comúnes universales como lo son símbolos tales como "$+$", "$-$", "$\times$", "$=$", "$<$", y el símbolo para el valor absoluto "$| \ |$". En algunos textos, por ejemplo, el símbolo menos, levantado, desempeña dos funciones: la de designar los números negativos, como en $^-7$ o en $^-3$, o la de designar al "opuesto de" como en $^-(^-7)$ y $^-(3)$. En las páginas de este cuaderno en que el lector encuentre $°2$, encontraría en otras obras posiblemente $^-(2)$; o cuando aquí usamos $°(^-7)$, es posible que otros autores usen $^-(^-7)$. Análogamente, el opuesto de un número x puede representarse por ^-x en lugar de por $°x$.

Por otra parte, algunos escritores emplean el símbolo común de la sustracción con dos significados: para indicar la operación de sustracción como en $7 - 5$, o para indicar al "opuesto de" como en $-(^-7)$. Por tanto, en las páginas en que en este cuaderno el lector encuentre $°3$ y $°(^-1)$, es posible que en otros libros hubiera encontrado $-(3)$ y $-(^-1)$. En tales textos también habría encontrado $-x$ en vez de $°x$.

Tradicionalmente, en los textos de álgebra y en la mayoría de los de matemáticas avanzadas el símbolo de la sustracción sirve los *tres* propósitos. Un uso es para denotar la sustracción, como en $5 - 3$. En este cuaderno hemos usado el símbolo exclusivamente para este propósito. Un segundo uso del símbolo "$-$" es para denotar los números negativos. En donde hemos usado los símbolos $^-3$ y $^-7$, los símbolos -3 y -7 son los que se emplean tradicionalmente. Un tercer uso del símbolo es el de representar "el opuesto de". En donde hemos escrito $°3$ o $°(^-7)$, lo que se emplea ordinariamente es -3 y $-(-7)$. En realidad, este uso está tan extendido que merece la pena estudiarlo aquí con una mayor extensión.

En primer lugar, como por definición por "opuesto de" queremos indicar "inverso aditivo de", el simbolismo que hemos usado en este cuaderno en el caso del entero 4, por ejemplo, nos daría $°4 = {}^-4$; es decir, el opuesto del 4 positivo es el 4 negativo. Si en lugar del símbolo "$°$" para "opuesto de" empleásemos el símbolo de sustracción, entonces $°4 = {}^-4$ aparecería como $-4 = {}^-4$. Ambas ecuaciones nos dicen que el opuesto del entero positivo 4 es el entero negativo $^-4$. Una vez que hemos llegado a este punto, es evidente que si -4 es igual a $^-4$, entonces tiene sentido el usar -4 para representar tanto el opuesto de 4 como el 4 negativo y olvidarse del símbolo $^-4$. Por otra parte, como la expresión de una diferencia, por ejemplo, $5 - 4$, significa por definición (y aquí usamos símbolos comunes) $5 + (-4)$, tampoco existe ambigüedad alguna respecto a la sustracción; luego el solo símbolo "$-$" puede desempeñar las tres funciones. De acuerdo con esto, cuando nos encontramos con una expresión, por ejemplo $5 - (-4)$, podemos razonar como sigue:

$$5 - (-4) \text{ significa, por definición, } 5 + [-(-4)].$$

(Dicho en palabras esto significa "la diferencia cuando el 4 negativo se resta de 5 es igual a la suma de 5 y el opuesto del 4 negativo".)

Como el opuesto de 4 negativo es 4 positivo, el símbolo $-(-4)$ puede reemplazarse por 4, y tenemos

$$5-(-4)=5+4.$$

La cuestión de si éste es un simbolismo más sencillo que, por ejemplo,

$$5-({}^{-}4)=5+[{}^{\circ}({}^{-}4)]=5+4$$

es discutible, pero no cabe duda alguna acerca del hecho de que si se puede, sin confusión, conseguir que un símbolo efectúe el trabajo de tres, se ha adelantado bastante.

Leer para entender

Una última palabra de advertencia: al leer cualquier material en que se empleen símbolos es bastante práctico determinar de manera precisa qué es lo que los símbolos quieren decir. Más aún, es de gran ayuda establecer la práctica de leer una colección de símbolos tales como $5-({}^{-}4)$ prestando una cuidadosa atención a lo que significan. Cuando hablamos de "leer para entender", lo que queremos decir es: traducir realmente los símbolos en palabras mental o incluso oralmente.

El simbolismo es engañoso porque a medida que se usa más y más, las personas se sienten tentadas a mirarlo superficialmente y tomar por garantizada la palabra del autor de que tiene sentido y es adecuada la ocasión para su uso. Por ejemplo, el autor se dice a sí mismo, "puedo ahorrar algún tiempo y esfuerzo si escribo algo como esto

$$\begin{aligned}18+9&=(1\times 10)+[(8+9)\times 1]\\&=(1\times 10)+(17\times 1)\\&=(1\times 10)+[(1\times 10)+(7\times 1)]\\&=[(1\times 10)+(1\times 10)]+(7\times 1)\\&=[(1+1)\times 10]+(7\times 1)\\&=(2\times 10)+(7\times 1)\\&=20+7\\&=27\end{aligned}$$

para explicar por qué $18+9$ es 27, en lugar de explicar cada parte del proceso con palabras". El lector, si no es cuidadoso, puede que sienta la tentación de decirse: "Sí, sí. Desde luego, $18+9=27$", y esto será la suma y sustancia de la comunicación entre autor y lector en este caso.

Es obvio que si el escrito no tratase de decir algo usando el simbolismo, todas las complicadas expresiones de la cadena no estarían allí. Por su parte, el lector de tales cosas debe presumir que está leyendo con el propósito de entender lo que el autor dice; pero sólo por medio de una atención diligente al *significado* de cada uno de los símbolos puede producirse una comunicación satisfactoria. En resumen, la lectura de las matemáticas es un proceso completamente distinto al proceso de lectura de otra clase de temas, y la tentación de leer por encima o saltarse las cosas es algo que se debe rechazar con firmeza.

Lecturas complementarias

Entre las distintas referencias útiles que tratan del tema que aquí introdujimos, están las siguientes:

ADLER, IRVING, *A New Look at Arithmetic*. Nueva York: New American Library, 1965, pág. 309. Esta obra puede obtenerse en la New American Library, Av. de las Américas 1301, Nueva York, N. Y. 10019.

MCFARLAND, DORA, y LEWIS, EUNICE M. *Introduction to Modern Mathematics for Elementary Teachers*. Boston: D. C. Heath & Co., 1966, pág. 406. Puede obtenerse en D. C. Heath & Co., Av. Columbus 285, Boston, Mass., 02116.

PETERSON, JOHN A. y HASHISAKI, JOSEPH. *Theory of Arithmetic* (2ª edición). Nueva York: John Wiley and Sons, 1967. Pág. 337. Puede obtenerse en John Wiley & Sons, Inc., 3ª Av. 605, Nueva York, N. Y. 10016.

WHEELER, RURIC E. *Modern Mathematics: An Elementary Approach*. Belmont, Cal.: Brooks/Cole, 1966, pág. 438. Puede obtenerse en Brooks/Cole, 10 Davis Drive, Belmont, Calif. 94002.

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS

Grupo de ejercicios 1 (pág. 15)

1. **a)** $N \cup W = W$.
b) $N \cap W = N$.

2. Como $W = N \cup \{0\}$, se tiene $N \subseteq W$. Como $0 \notin N$, se tiene $N \neq W$. De donde N es un subconjunto *propio* de W, $N \subset W$.

3. 0, 3, 5, 7, 19

4. **a, c, d, e**

5. Coordenada

6. Gráfica

7. Adición y multiplicación

8. No. Para resolver estos problemas se necesitan números que muestren la dirección además de la magnitud.

Grupo de ejercicios 2 (pág. 19)

1. Enteros negativos

2. Enteros positivos

3. 0

4. **a)** J^+ **b)** J^- **c)** $\{0\}$ **d)** J^- **e)** J^+ **f)** J^+

5. **a)** Números plenos **b)** Enteros **c)** Enteros **d)** Enteros

6. **a)** $^-5$ **b)** $^-500$ **c)** $^-9$ **d)** $^-5$

Grupo de ejercicios 3 (pág. 21)

1. **a)** $^-2$ **b)** 8 **c)** 0 **d)** 768 **e)** $^-45$ **f)** 30

2. **a)** $^-7$ **b)** 3 **c)** 0 **d)** $^-18$ **e)** $^-8$ **f)** $^-3$

3.

a	2	$^-5$	4	$^-3$	0	$^-6$	8	15	1	$^-9$	10
^oa	$^-2$	5	$^-4$	3	0	6	$^-8$	$^-15$	$^-1$	9	$^-10$

4. Negativo

5. Positivo

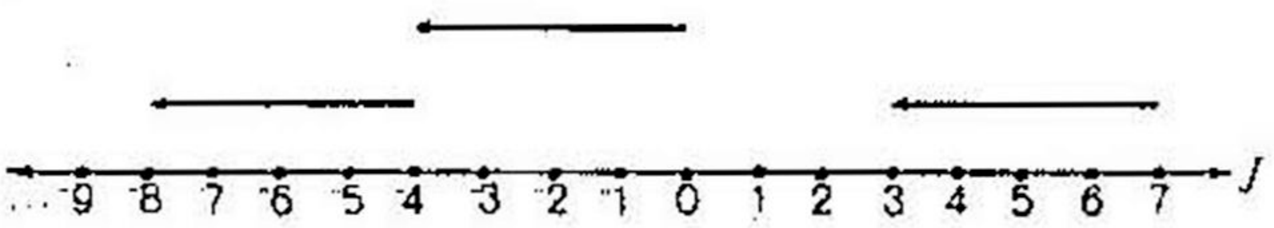
6. Cero

Grupo de ejercicios 4 (pág. 23)

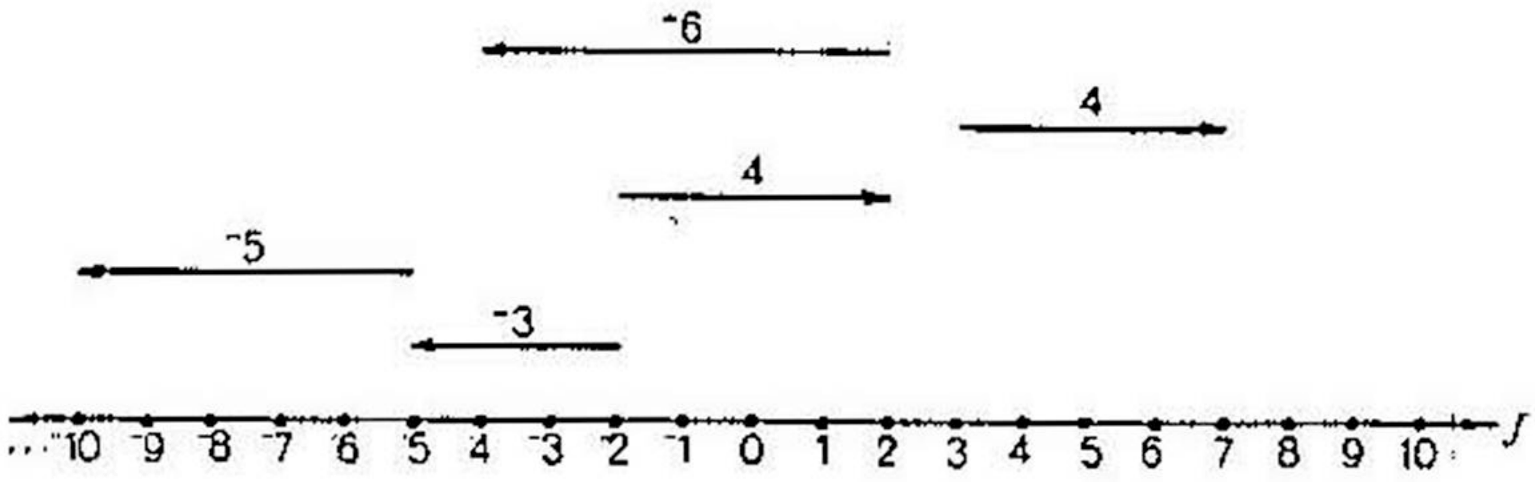
1. **a)** Cada flecha tiene 4 unidades de longitud y representa un movimiento hacia la derecha.
b) Cada flecha comienza en un entero diferente y termina en un entero diferente.
c) 4

2. **a)** Cada flecha tiene 4 unidades de longitud.
b) Cada flecha comienza y termina en un entero diferente. Dos de las flechas representan un movimiento hacia la izquierda sobre la recta de los números, y una de ellas representa un movimiento hacia la derecha sobre la recta de los números.
c) Dos flechas representan al entero ⁻4. Una flecha representa a 4.
d) La flecha que se extiende más lejos a la izquierda (de 0 a ⁻4) está en posición estándar.

3.



4.



Grupo de ejercicios 5 (pág. 26)

1. **a)** 3 **c)** 1
b) 0 **d)** 9

2. **a)** Una flecha dibujada de ⁻3 a 7
b) Una flecha dibujada de 9 a ⁻1
c) Una flecha dibujada de ⁻6 a 0
d) Una flecha dibujada de 6 a ⁻2

3. **a)** 17 **c)** 10
b) 10 **d)** 66

4. **a)** ⁻2 **c)** 3
b) ⁻4 **d)** 7

5. Positivo

6. Negativo

Grupo de ejercicios 6 (pág. 29)

1. "No negativos" incluye al cero. "Positivos" lo excluye.

2. "No positivos" incluye al cero. "Negativos" lo excluye.

3. **a)** 14 **d)** 6
b) 5 **e)** 9
c) 0 **f)** 3

4. $^\circ a < {}^\circ b$

5. **a)** 60° **c)** 0°
b) 10° **d)** $^-10°$

6. $^-8$, $^-5$, 0, 4, 6

7. **a)** $<$
b) $>$
c) $=$

8. **a)** V **c)** V
b) F **d)** F

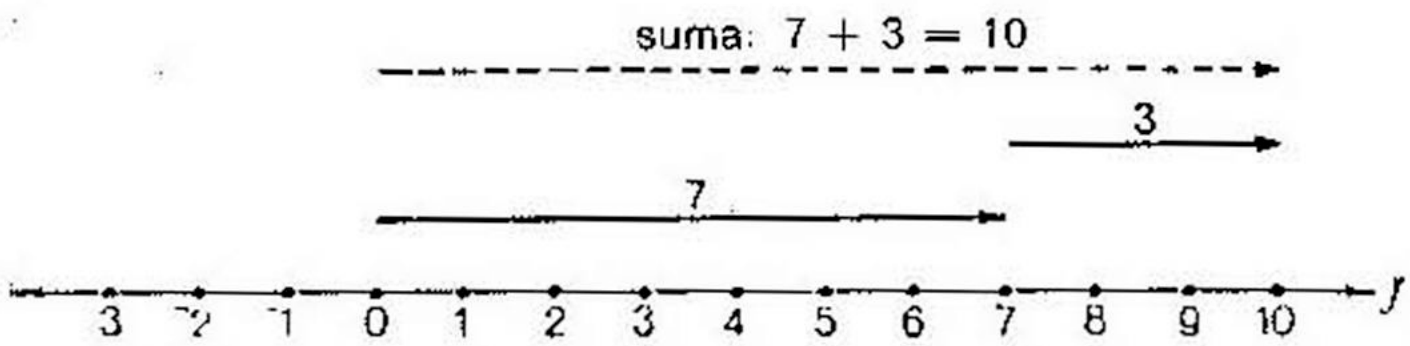
9. **a)** $>$ **c)** $>$
b) $>$ **d)** $=$

10. No, porque designaría dos enteros, 2 y $^-2$.

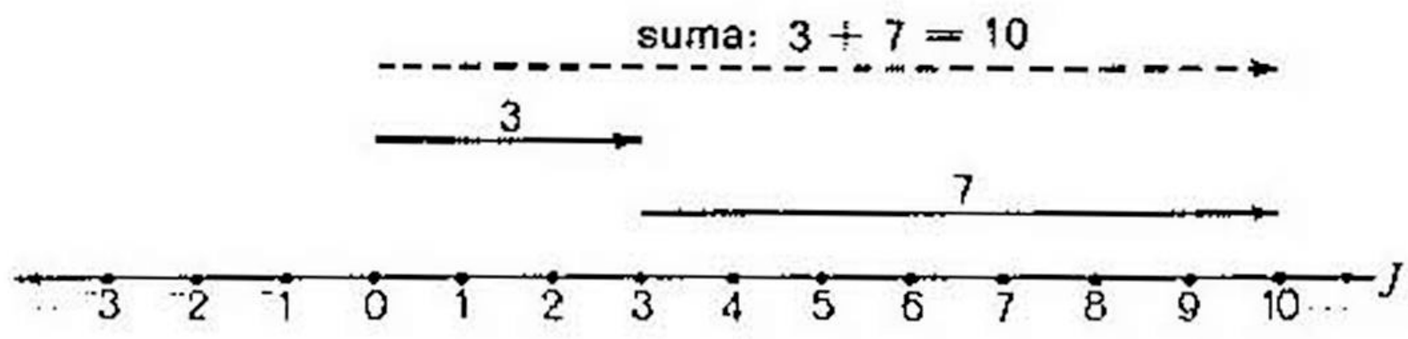
11. **a)** V **d)** F
b) F **e)** V
c) F **f)** F

Grupo de ejercicios 7 (pág. 33)

1. **a)**

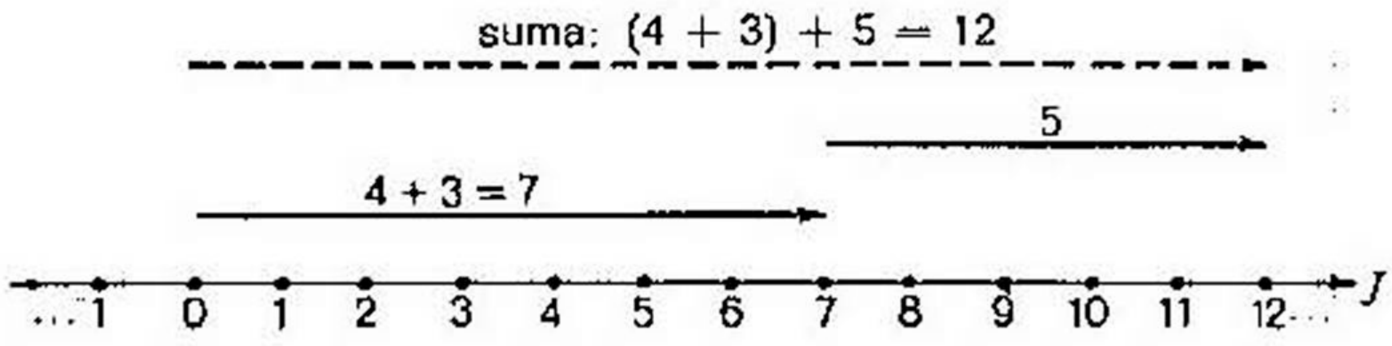


b)

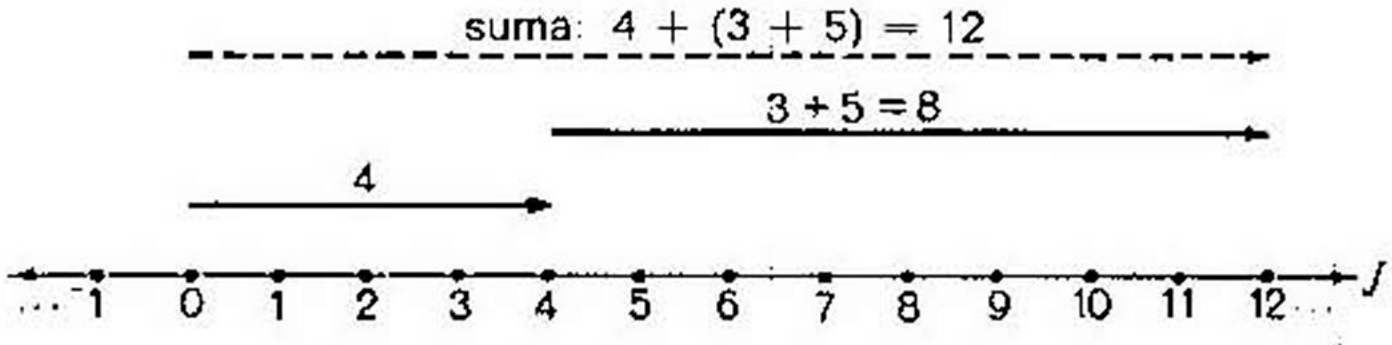


2. **a)** 7 y 3 **b)** 3 y 7
c) Los enteros son iguales en ambos pares.
d) El orden de los sumandos es diferente.
e) Las sumas son iguales.

3. **a)**

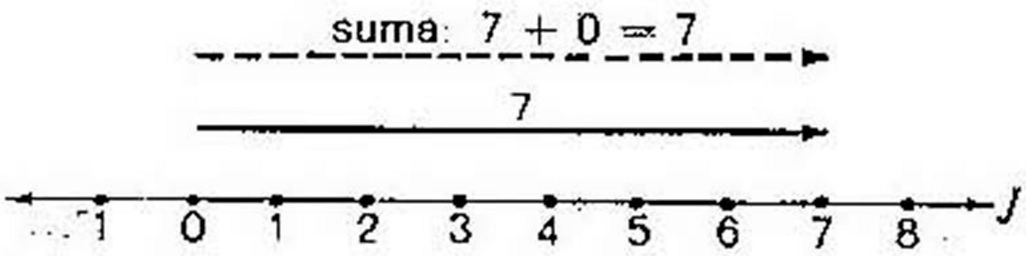


b)



4. **a)** 7 **c)** 8
b) 12 **d)** 12
e) La agrupación de los sumandos puede cambiarse sin cambiar la suma.

5.



6. 7 + 0 es de nuevo 7.

7. **a)** V **c)** F
b) F **d)** V

Grupo de ejercicios 8 (pág. 35)

1. **a)** 7 **d)** 2 **g)** 8
b) 8 **e)** 15 **h)** 1
c) 5 **f)** 7

2. **a)** $^{-}2 + {}^{-}3 = {}^{-}5$. **b)** $^{-}3 + {}^{-}4 = {}^{-}7$.

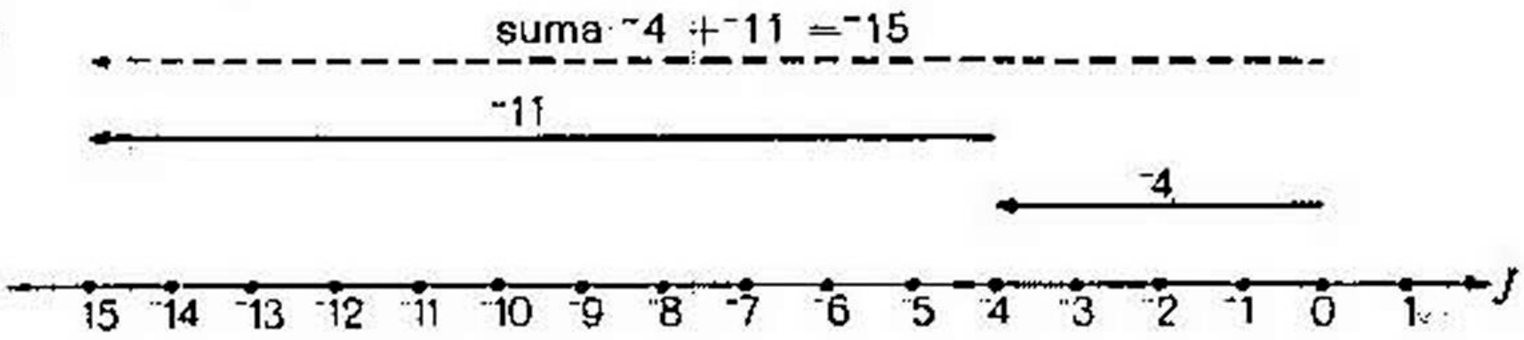
3. **a)** $^{-}102$ **d)** $^{-}133$ **g)** $^{-}1361$
b) $^{-}35$ **e)** $^{-}39$ **h)** $^{-}969$
c) $^{-}1009$ **f)** $^{-}144$

Grupo de ejercicios 9 (pág. 39)

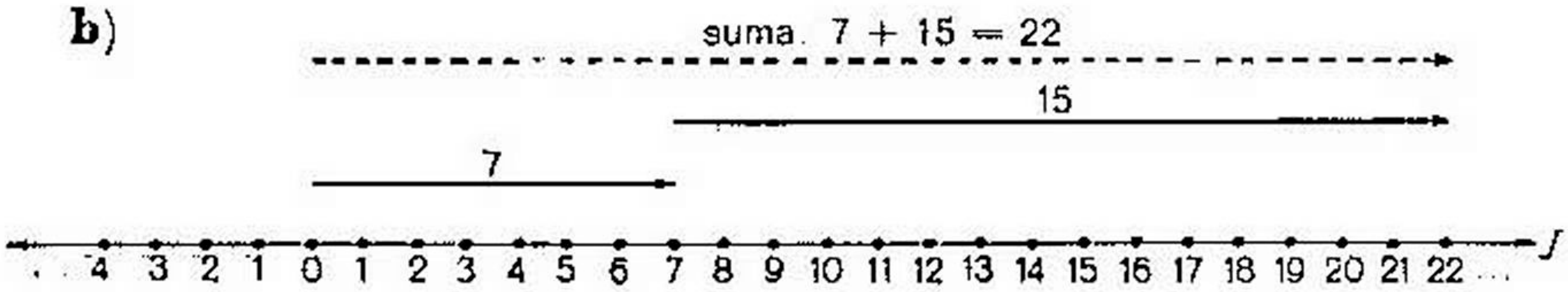
1. $2 + 3 = 5$.
2. $^{-}1 + {}^{-}2 = {}^{-}3$.
3. $3 + {}^{-}7 = {}^{-}4$.
4. $^{-}2 + 7 = 5$.
5. $4 + {}^{-}4 = 0$.
6. $6 + 0 = 6$.

Grupo de ejercicios 10 (pág. 43)

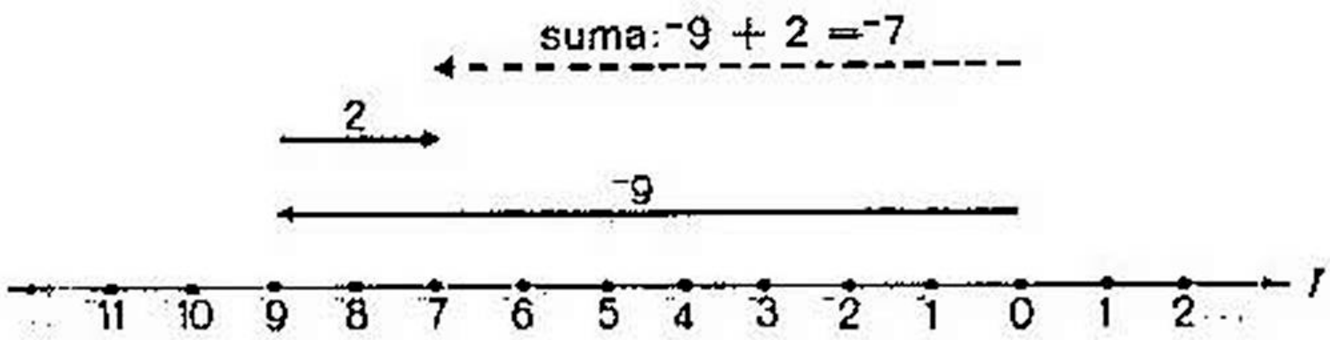
1. a)



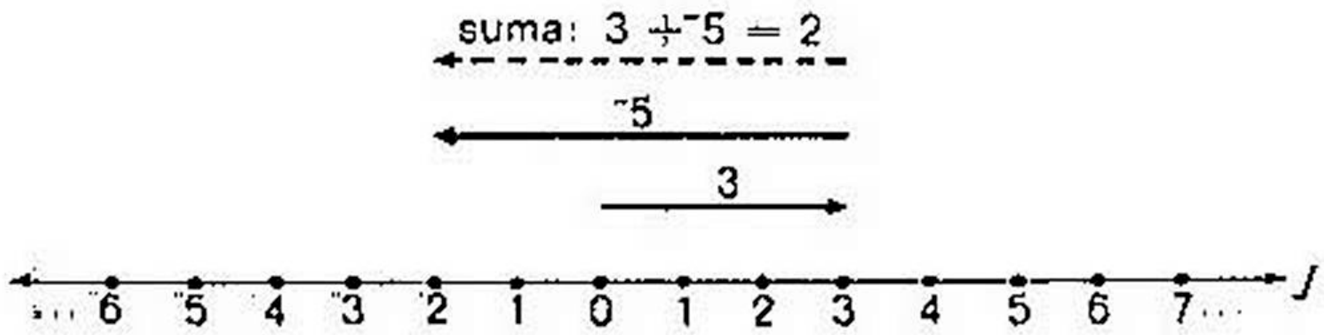
b)



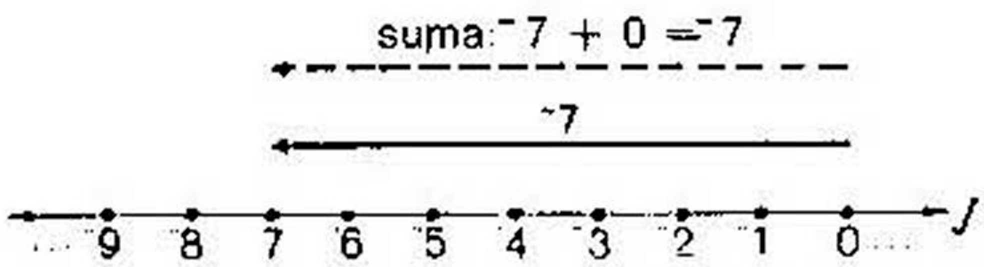
c)



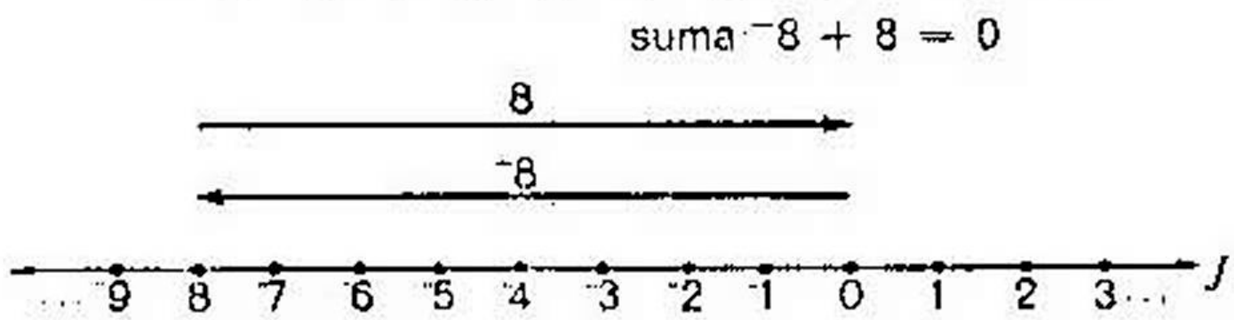
d)



e)



f)



2. **a)** 10 **c)** 2 **e)** 0
b) $^{-}11$ **d)** $^{-}3$ **f)** 5

3. **a)** $50 + 6 =$ ________; \$56.00.
b) $50 + 7 + {}^{-}10 =$ ________; \$47.00.
c) $50 + 15 + {}^{-}8 =$ ________; \$57.00.
d) $50 + {}^{-}9 + {}^{-}6 =$ ________; \$35.00.
e) $50 + {}^{-}28 + 18 =$ ________; \$40.00.
f) $50 + 11 + {}^{-}11 =$ ________; \$50.00.

4.

Segundo sumando

Primer sumando

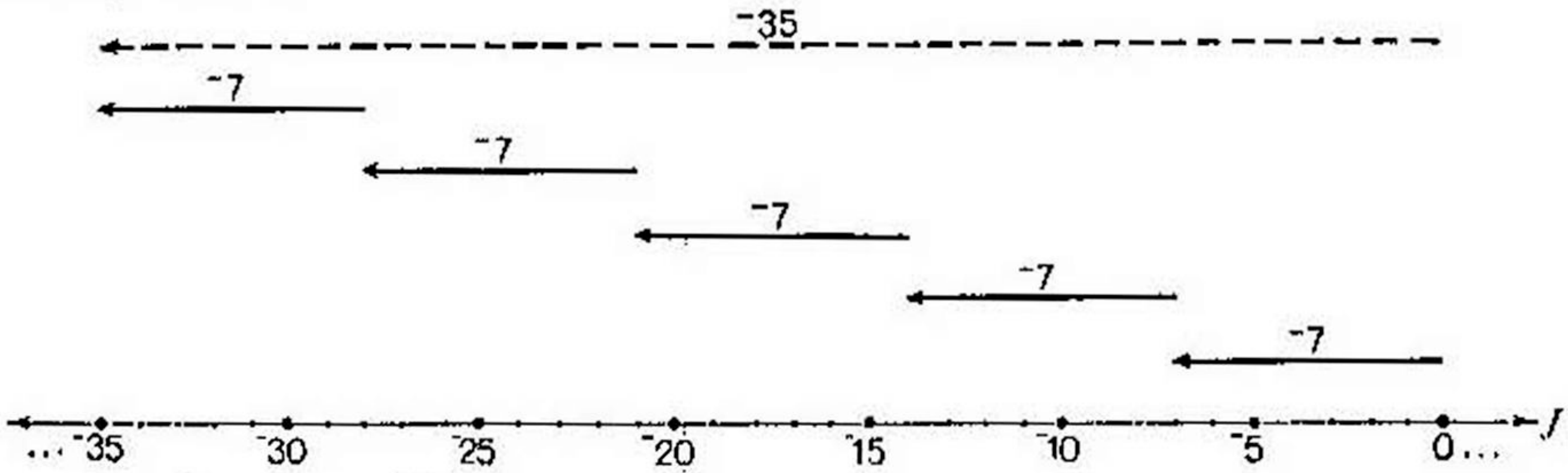
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-14	-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-15	-14	-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
-16	-15	-14	-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
-17	-16	-15	-14	-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
-18	-17	-16	-15	-14	-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0

5. **a)** k
b) Cero
c) Entero
d) Suma
e) 1
f) 3
g) 7
h) 5
i) 5
j) 5

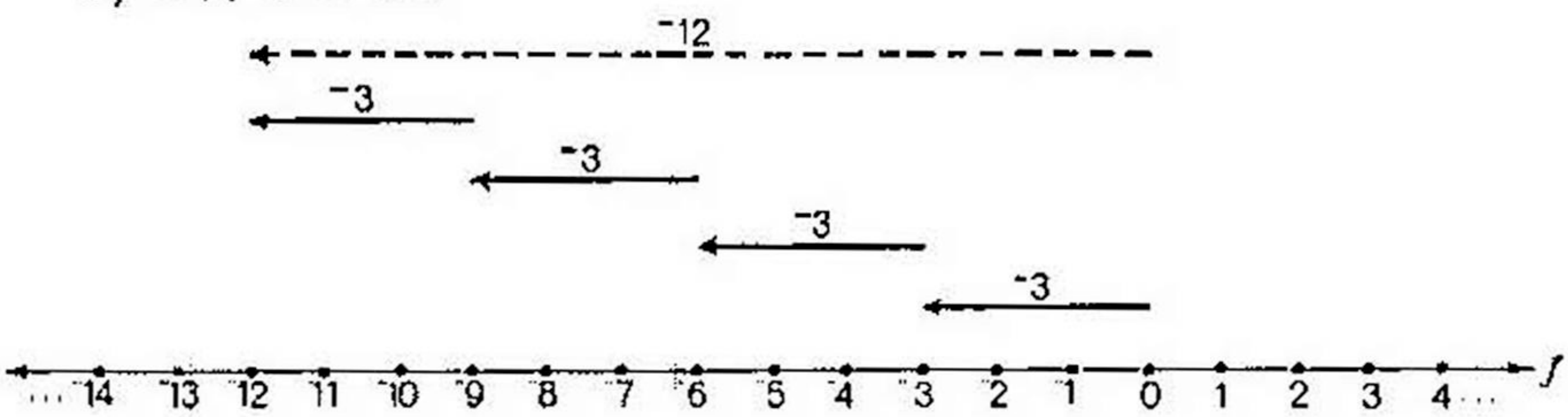
Grupo de ejercicios 11 (pág. 50)

1. **a)** $2 + 2 + 2 = 6$;
$3 \times 2 = 6$.
b) ${}^{-}3 + {}^{-}3 + {}^{-}3 = {}^{-}9$;
$3 \times {}^{-}3 = {}^{-}9$.
c) ${}^{-}1 + {}^{-}1 + {}^{-}1 + {}^{-}1 + {}^{-}1 + {}^{-}1 + {}^{-}1 = {}^{-}7$;
$7 \times {}^{-}1 = {}^{-}7$.

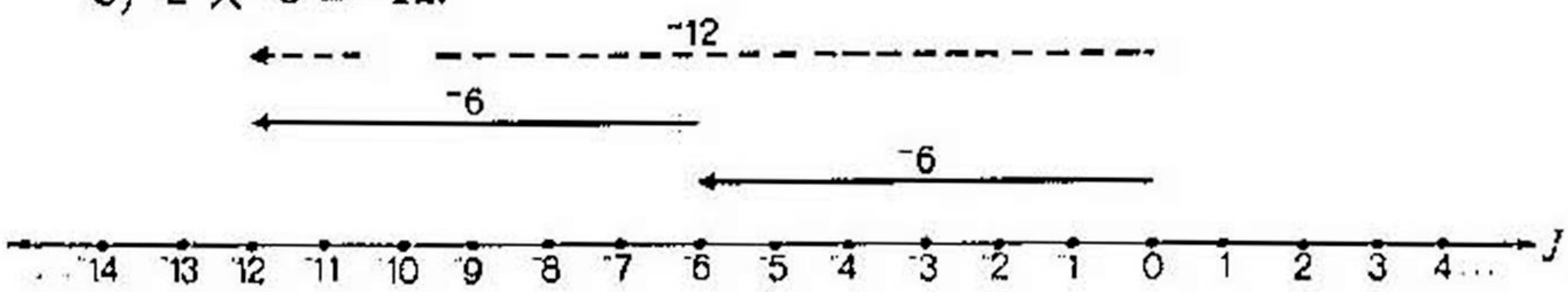
2. **a)** $5 \times {}^{-}7 = {}^{-}35$.



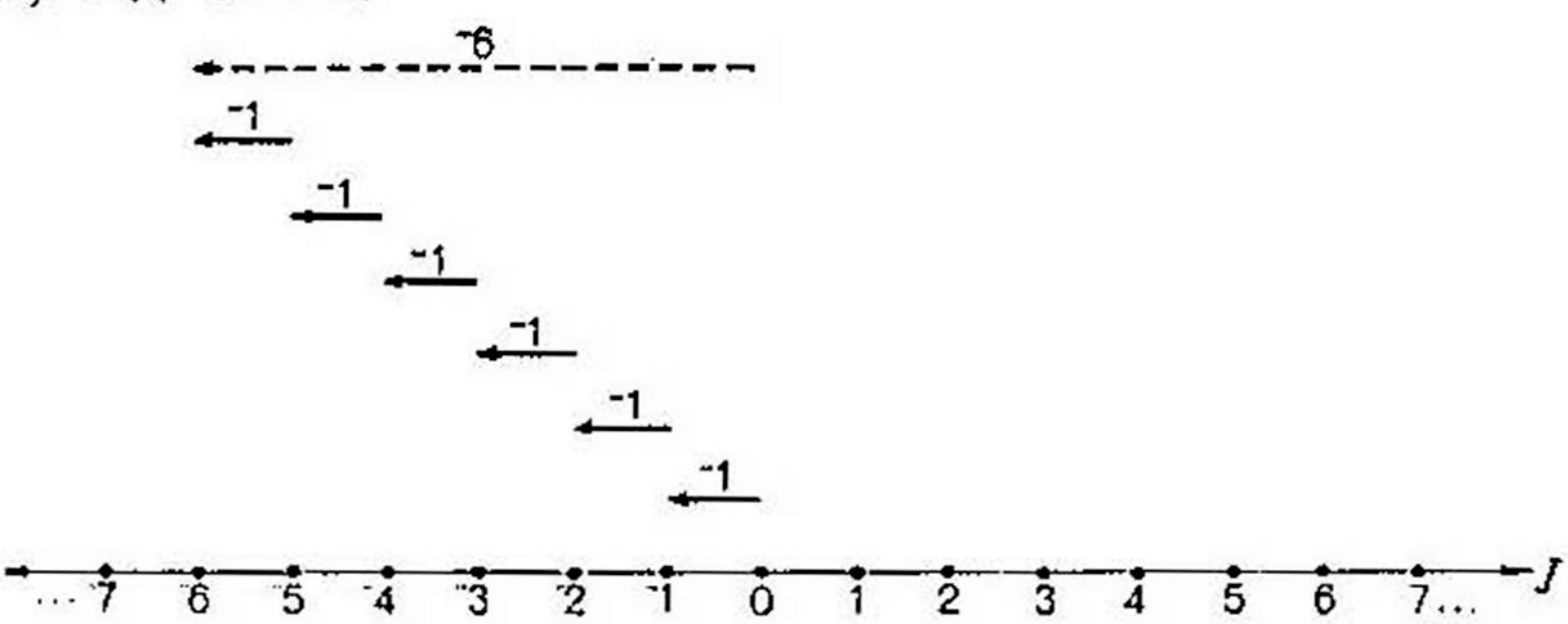
b) $4 \times {}^{-}3 = {}^{-}12$.



c) $2 \times {}^{-}6 = {}^{-}12$.



d) $6 \times {}^{-}1 = {}^{-}6$.



3. a) $^-3$ c) $^-6$
b) 2 d) 9

4.

Producto
18
9
0
$^-9$
$^-18$
18
9
0
$^-9$
$^-18$

5. a) $^-175$ c) $^-38$ e) $^-3\,596$
b) $^-294$ d) $^-74$ f) $^-280$

Grupo de ejercicios 12 (pág. 54)

1. a) $^-2 \times {}^-4 = (^-1 \times 2) \times (^-1 \times 4)$,
$^-2 \times {}^-4 = (^-1 \times {}^-1) \times (2 \times 4)$,
$^-2 \times {}^-4 = 1 \times (2 \times 4)$,
$^-2 \times {}^-4 = 1 \times 8$,
$^-2 \times {}^-4 = 8$.
b) $^-5 \times {}^-9 = (^-1 \times 5) \times (^-1 \times 9)$,
$^-5 \times {}^-9 = (^-1 \times {}^-1) \times (5 \times 9)$,
$^-5 \times {}^-9 = 1 \times (5 \times 9)$,
$^-5 \times {}^-9 = 1 \times 45$,
$^-5 \times {}^-9 = 45$.
c) $^-78 \times {}^-31 = (^-1 \times 78) \times (^-1 \times 31)$,
$^-78 \times {}^-31 = (^-1 \times {}^-1) \times (78 \times 31)$,
$^-78 \times {}^-31 = 1 \times (78 \times 31)$,
$^-78 \times {}^-31 = 1 \times 2\,418$,
$^-78 \times {}^-31 = 2\,418$.

d) $^-650 \times {^-478} = (^-1 \times 650) \times (^-1 \times 478)$,
$^-650 \times {^-478} = (^-1 \times {^-1}) \times (650 \times 478)$,
$^-650 \times {^-478} = 1 \times (650 \times 478)$,
$^-650 \times {^-478} = 1 \times 310\,700$,
$^-650 \times {^-478} = 310\,700$.

2.

Producto
$^-14$
$^-7$
0
7
14

3. **a)** 5 184
b) 391
c) $^-5\,070$
d) 0
e) $^-2\,242$
f) 209 202

Grupo de ejercicios 13 (pág. 56)

1.

Segundo factor

Primer factor

-144	-132	-120	-108	-96	-84	-72	-60	-48	-36	-24	-12	12	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144
-132	-121	-110	-99	-88	-77	-66	-55	-44	-33	-22	-11	11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
-120	-110	-100	-90	-80	-70	-60	-50	-40	-30	-20	-10	10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
-108	-79	-90	-81	-72	-63	-54	-45	-36	-27	-18	-9	9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
-96	-88	-80	-72	-64	-56	-48	-40	-32	-24	-16	-8	8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
-84	-77	-70	-63	-56	-49	-42	-35	-28	-21	-14	-7	7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
-72	-66	-60	-54	-48	-42	-36	-30	-24	-18	-12	-6	6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
-60	-55	-50	-45	-40	-35	-30	-25	-20	-15	-10	-5	5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
-48	-44	-40	-36	-32	-28	-24	-20	-16	-12	-8	-4	4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
-36	-33	-30	-27	-24	-21	-18	-15	-12	-9	-6	-3	3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
-24	-22	-20	-18	-16	-14	-12	-10	-8	-6	-4	-2	2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-1	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12
24	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2	-2	-2	-4	-6	-8	-10	-12	-14	-16	-18	-20	-22	-24
36	33	30	27	24	21	18	15	12	9	6	3	-3	-3	-6	-9	-12	-15	-18	-21	-24	-27	-30	-33	-36
48	44	40	36	32	28	24	20	16	12	8	4	-4	-4	-8	-12	-16	-20	-24	-28	-32	-36	-40	-44	-48
60	55	50	45	40	35	30	25	20	15	10	5	-5	-5	-10	-15	-20	-25	-30	-35	-40	-45	-50	-55	-60
72	66	60	54	48	42	36	30	24	18	12	6	-6	-6	-12	-18	-24	-30	-36	-42	-48	-54	-60	-66	-72
84	77	70	63	56	49	42	35	28	21	14	7	-7	-7	-14	-21	-28	-35	-42	-49	-56	-63	-70	-77	-84
96	88	80	72	64	56	48	40	32	24	16	8	-8	-8	-16	-24	-32	-40	-48	-56	-64	-72	-80	-88	-96
108	99	90	81	72	63	54	45	36	27	18	9	-9	-9	-18	-27	-36	-45	-54	-63	-72	-81	-90	-99	-108
120	110	100	90	80	70	60	50	40	30	20	10	-10	-10	-20	-30	-40	-50	-60	-70	-80	-90	-100	-110	-120
132	121	110	99	88	77	66	55	44	33	22	11	-11	-11	-22	-33	-44	-55	-66	-77	-88	-99	-110	-121	-132
144	132	120	108	96	84	72	60	48	36	24	12	-12	-12	-24	-36	-48	-60	-72	-84	-96	-108	-120	-132	-144

2. **a)** Sí
b) 81
c) $^{-}81$
d) 81
e) $^{-}81$
f) $^{-}4$
g) $^{-}7$
h) $^{-}7$
i) $^{-}8$
j) 9
k) 6

3. **a)** $^{-}6$
b) $^{-}24$
c) $^{-}24$
d) 12
e) $^{-}24$
f) 3×4

4. **a)** Propiedad conmutativa de la multiplicación
b) Propiedad asociativa de la multiplicación
c) Propiedad de cierre de la multiplicación.
d) Propiedad multiplicativa del cero
e) Propiedad multiplicativa de 1

5. **a)** $^{-}3 \times {}^{-}5 = 15$. El restorán tenía 15 vasos más antes de la llegada de la camarera.
b) $2 \times {}^{-}5 = {}^{-}10$. El restorán tendrá 10 vasos menos.

6. **a)** $2 \times {}^{-}1 = {}^{-}2$. Tendrá 2 vasos menos.
b) $^{-}2 \times {}^{-}1 = 2$. Era 2 vasos mayor.

Grupo de ejercicios 14 (pág. 61)

1. **a)** $3 - {}^{-}7 = 10$.
b) $^{-}3 - {}^{-}7 = 4$.
c) $^{-}7 - 7 = {}^{-}14$.
d) $3 - 7 = {}^{-}4$.

2. **a)** 14
b) 6
c) $^{-}38$
d) $^{-}108$

3. Lunes: 18°
Martes: $^{-}10$°
Miércoles: 2°
Jueves: $^{-}11$°
Viernes: 18°

Grupo de ejercicios 15 (pág. 66)

1. **a)** $6 \times n = {}^{-}24$.
b) $^{-}6 \times n = 36$.
c) $^{-}7 \times n = {}^{-}42$.
d) $8 \times n = 512$.
e) $1 \times n = {}^{-}312$.
f) $8 \times n = {}^{-}96$.
g) $^{-}12 \times n = 144$.
h) $^{-}24 \times n = {}^{-}840$.

2. **a)** $^{-}6$
b) 48
c) 40
d) 22
e) $^{-}72$
f) $^{-}14$

nos pueda auxiliar tanto a los maestros en su cátedra, como a los alumnos en su aprendizaje.

Títulos que componen esta colección:

1. Conjuntos
2. Números enteros
3. Sistemas de numeración para los números enteros
4. Algoritmos de las operaciones con números enteros
5. Números y sus factores
6. Números racionales
7. Sistemas de numeración para los números racionales
8. Proposiciones numéricas
9. El sistema de los enteros
10. El sistema de los números racionales
11. El sistema de los números reales
12. Lógica
13. Gráficas, relaciones y funciones
14. Geometría informal
15. Medida
16. Recopilación, organización e interpretación de datos
17. Sugerencias para resolver problemas
18. Simetría, congruencia y semejanza

OTRO TÍTULO

Didáctica de la matemática

Emma Castelnuovo

En esta obra, cuya aparición en español era esperada por maestros y estudiantes, la autora no se propone dictar reglas para enseñar mejor ni provee de fórmulas mágicas para la enseñanza de la matemática, sino que intenta un examen franco y accesible sobre los aspectos que más interesan a los profesores de la materia.

La maestra Castelnuovo hace un importante análisis de las corrientes pedagógicas y psicológicas que más han influido en la enseñanza. Comenio, Pestalozzi, Decroly, Montessori, Jean Piaget, Hans Aebli, Louis Johannet, etc., son estudiados en sus aportaciones a la metodología de la enseñanza, en una secuencia que conduce de la didáctica general a la particular de la matemática.